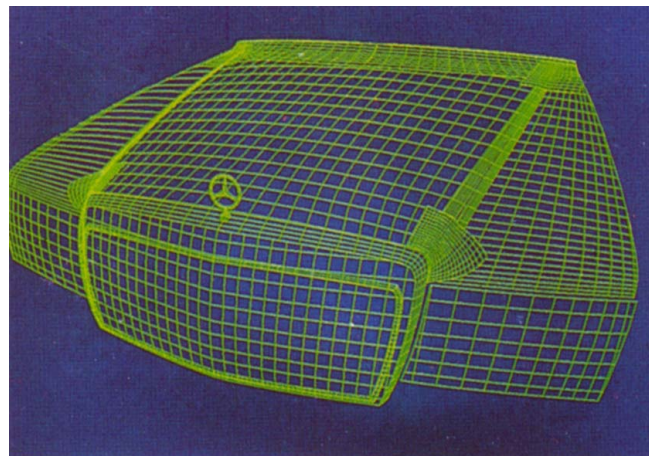
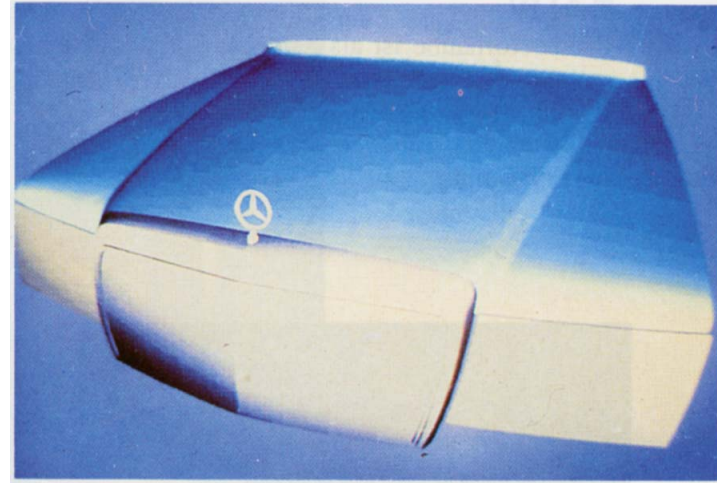


Freiformkurven



aus: Farin Curven und Flächen im CAGD

→ Definition für gebogene Kurven und Flächen

→ Anwendungen:

- CAD: Automobil-, Flugzeug-, Schiffsbau
- Computergraphik: Objektmodellierung
- sonst: Architektur, Kunst

Definition von Kurven

Explizite Beschreibung: Kurve wird über Koordinatenpaare aus Funktionsargument und Wert beschrieben

$$y = f(x) \quad (\text{ im 3D zusätzlich: } z = g(x))$$

Probleme:

- mehrere Werte für ein x sind nicht möglich
- nicht rotationsvariant
- keine Kurven mit vertikalen Tangenten beschreibbar

Implizite Beschreibung:

Kurve wird beschrieben über Nullmenge einer Funktion:

$$f(x,y,z)=0$$

Problem:

- Gleichungen liefern mehr Lösungen als erwünscht
(Bsp.: Kreis $x^2 + y^2 = 1$ aber: Halbkreis ?)

Vorteil:

- effiziente Bestimmung, ob Punkt auf der Kurve liegt bzw. auf welcher Seite er liegt

Parametrische Beschreibung:

Kurve wird über Funktionswerte zu einem Laufparameter beschrieben:

$$x = x(t) , y = y(t) , z = z(t)$$

Vorteil:

- jede Steigung ist erlaubt (sogar Überschneidungen)
- Kurve wird stückchenweise polynomial approximiert zur Verminderung des Rechenaufwandes

kubischer Fall:

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_x$$

in Matrixschreibweise:

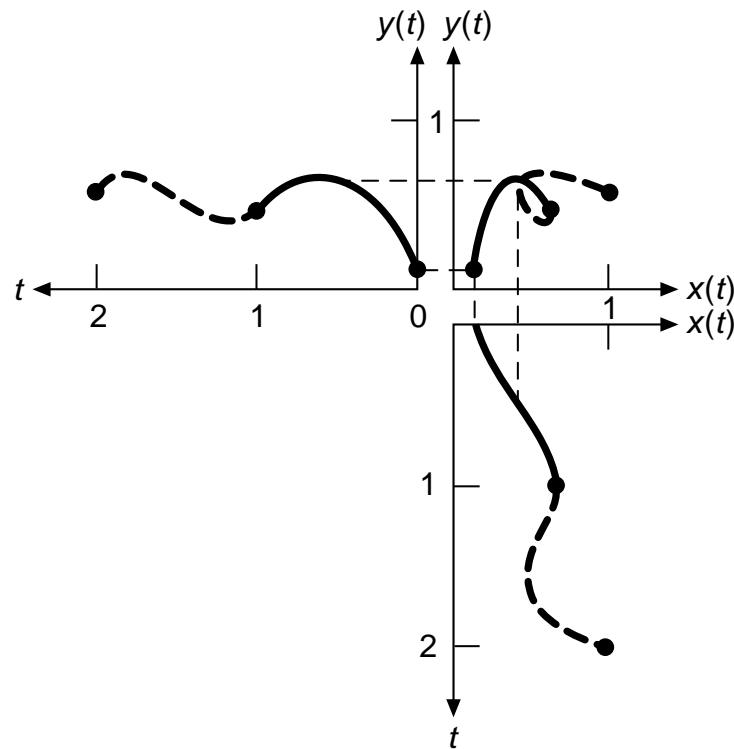
$$Q(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tangentenvektor:

$$\frac{t}{dt} Q(t) = \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Parametrische Kurven

parametrische Kurve $(x(t), y(t))$ und Einzelbeschreibungen:



aus: Foley et al.: Computer Graphics

Hermit-Interpolation

→ kubische Interpolation zweier Punkte mit Vorgabe der Steigungen

Gegeben:

Punkte P_1, P_4 (später zusätzlich P_2, P_3)

Ableitungen R_1, R_4 (in Punkten P_1, P_4)

Geometrievektor:

$$G_H = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ R_1 \\ R_4 \end{pmatrix}$$

→ gesucht: kubische Polynome $(x(t), y(t), z(t))$

→ für x-Koordinate

$$\begin{aligned}x(t) &= a_x t^3 + b_y t^2 + c_x t + d_x \\ &= \underbrace{[t^3 \ t^2 \ t \ 1]}_T \cdot M_H \cdot G_H\end{aligned}$$

Es muss gelten:

$$x(0) = P_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot M_H \cdot G_H$$

$$x(1) = P_4 = [1 \ 1 \ 1 \ 1] \cdot M_H \cdot G_H$$

$$x'(0) = R_1 = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot M_H \cdot G_H$$

$$x'(1) = R_4 = [3 \ 2 \ 1 \ 0] \cdot M_H \cdot G_H$$

oder als Matrix ausgedrückt:

$$G_H = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_M \cdot M_H \cdot G_H$$

damit muss gelten: $M = M_H^{-1}$, und demzufolge:

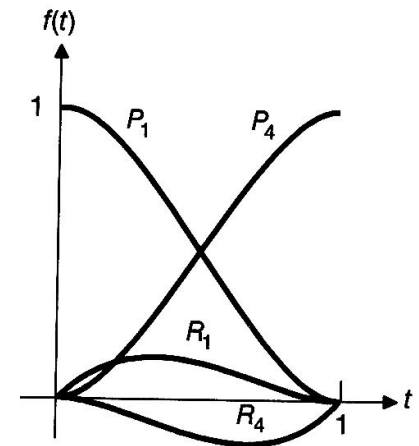
$$M_H = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ als parametrische Kurve:

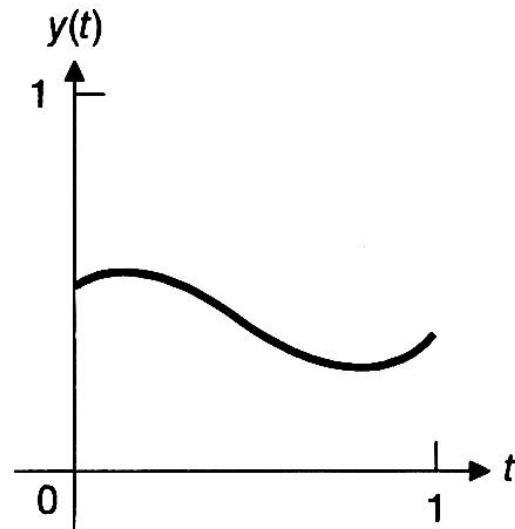
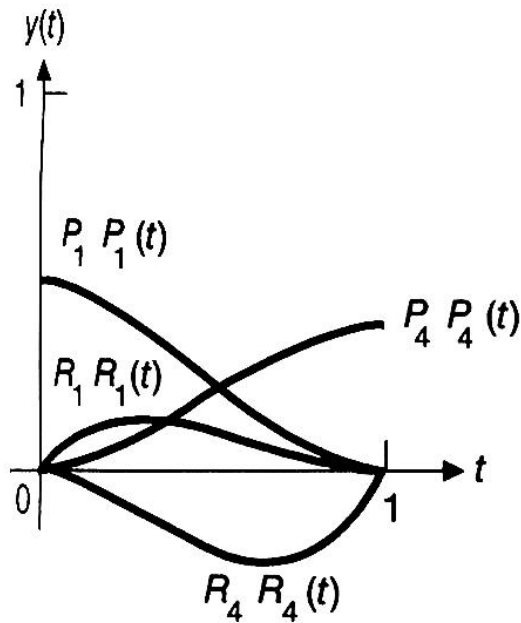
$$Q(t) = T \cdot M_H \cdot G_H$$

ausgeschrieben:

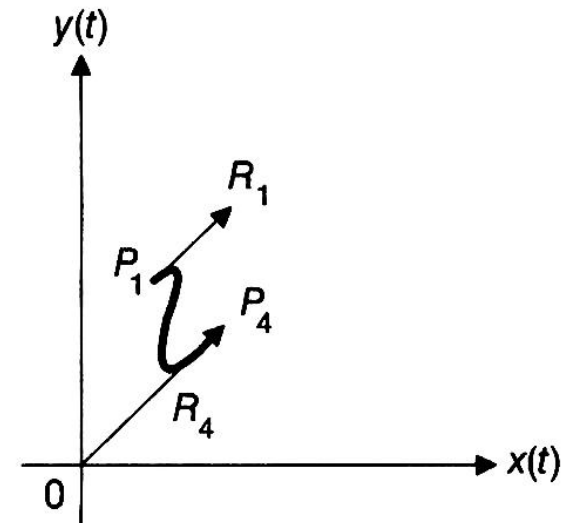
$$Q(t) = \underbrace{(2t^3 - 3t^2 + 1)}_{P_1(t)} P_1 + \underbrace{(-2t^3 + 3t^2)}_{P_4(t)} P_4 + \underbrace{(t^3 - 2t^2 + t)}_{R_1(t)} R_1 + \underbrace{(t^3 - t^2)}_{R_4(t)} R_4$$



Beispiel für Kurvensynthetisierung:



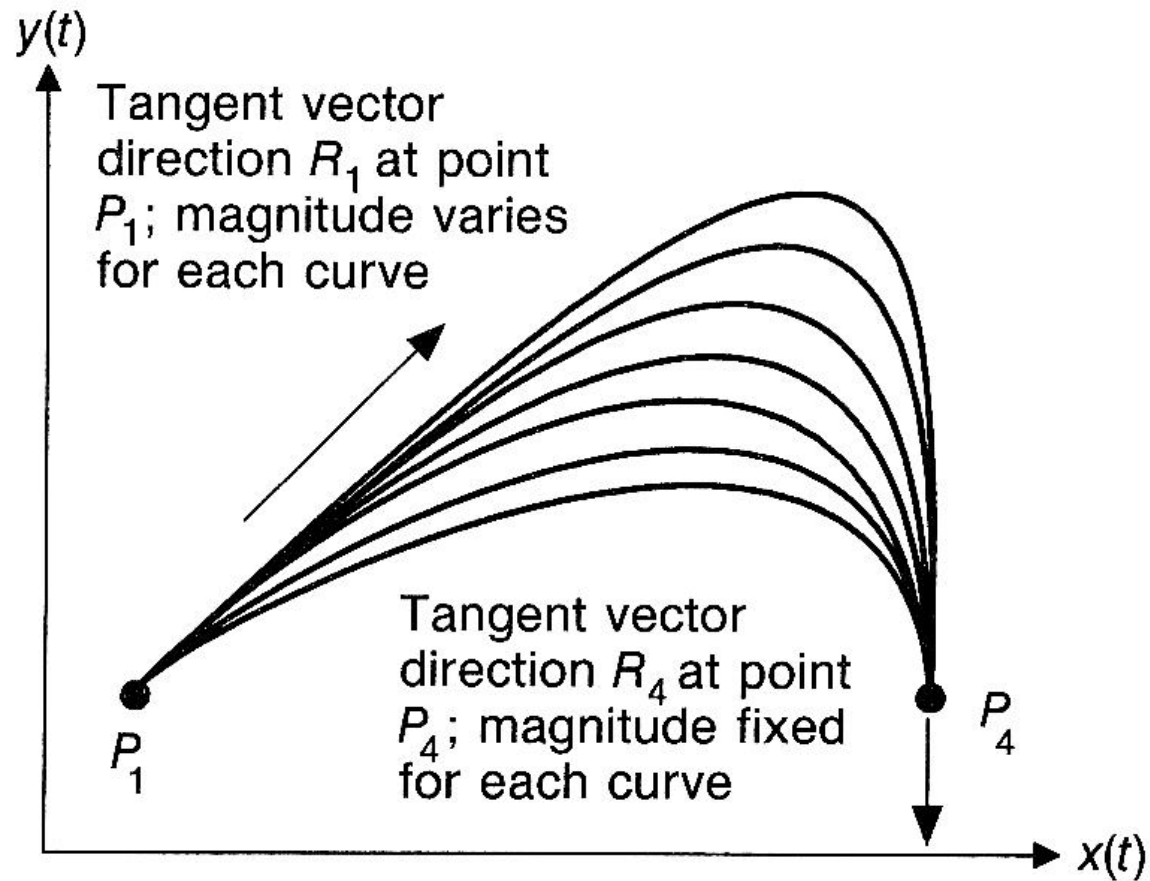
$$y(t) = P_1 P_1(t) + P_4 P_4(t) + R_1 R_1(t) + R_4 R_4(t)$$



- a) Verblendung der Einzelkurven; b) Summe der Kurven; c) parametrische Kurve

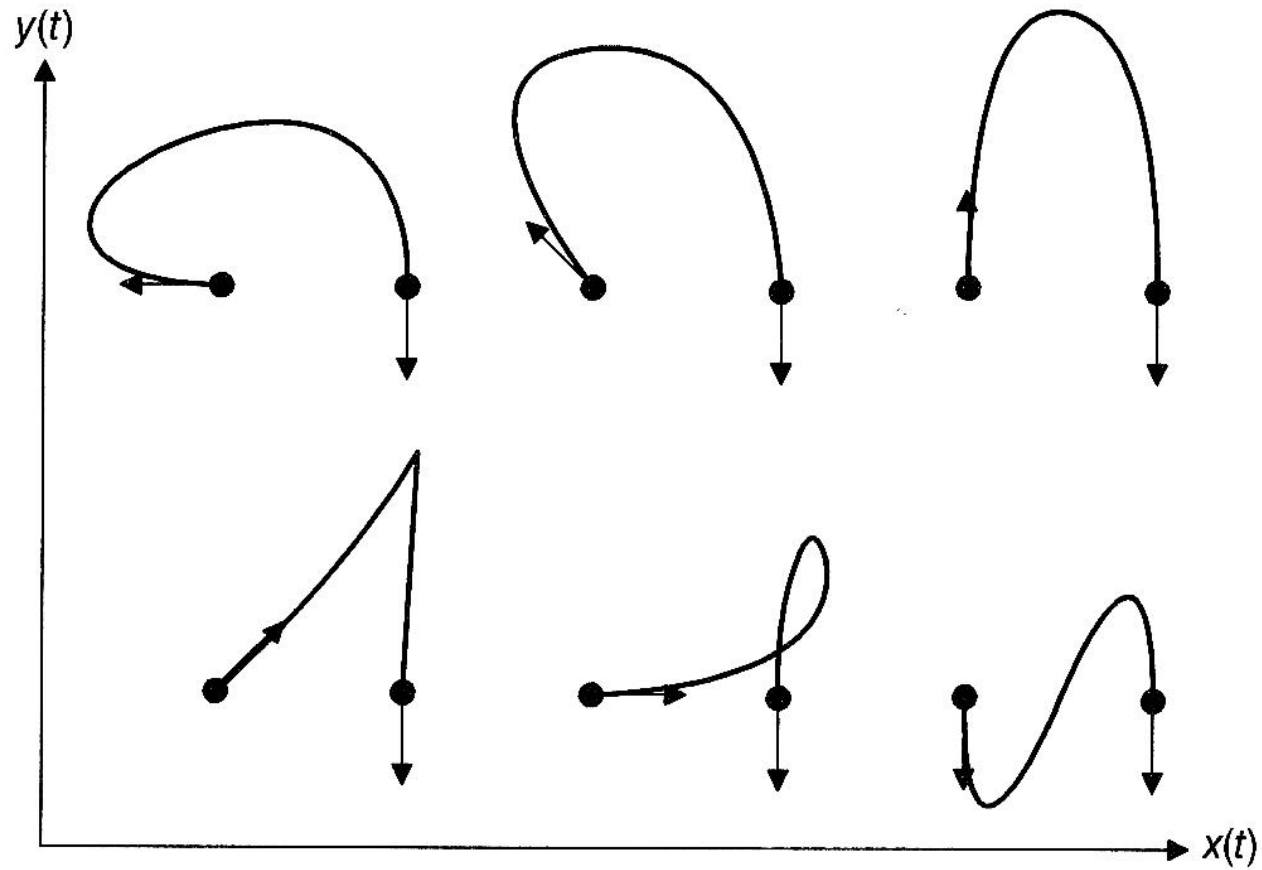
aus: Foley et al.: Computer Graphics

Einfluß der Steigungsvektoren (Länge)



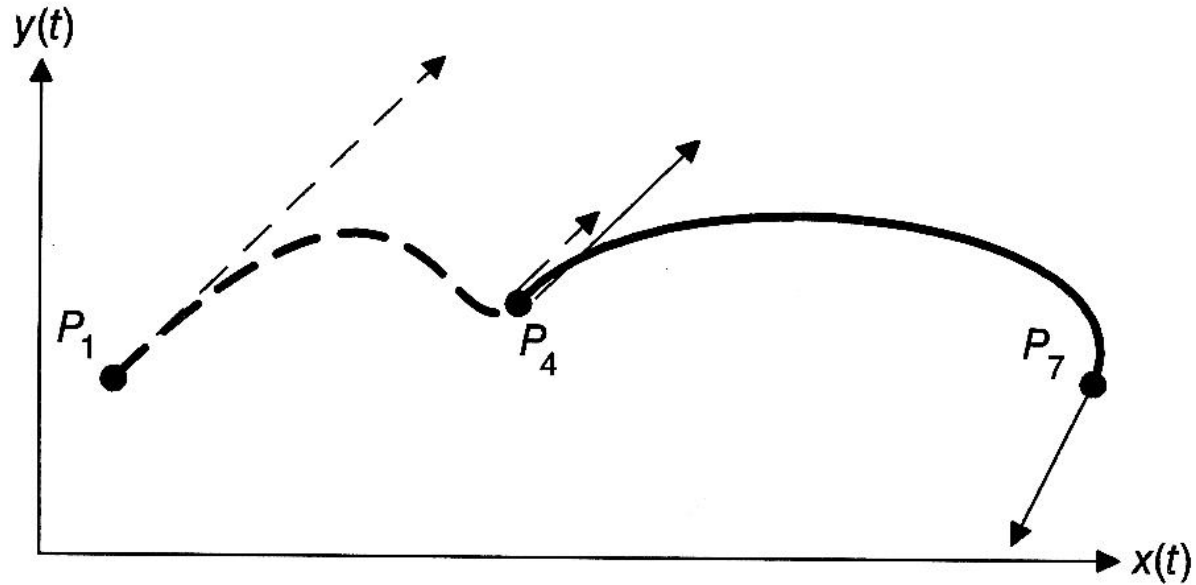
aus: Foley et al.: Computer Graphics

Einige Beispielkurven:



aus: Foley et al.: Computer Graphics

Aneinandergehängte Kurvensegmente:



aus: Foley et al.: Computer Graphics

Bezierkurven

$\Rightarrow R_1, R_4$ werden indirekt durch P_2, P_3 spezifiziert.

$$G_B = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix}$$

wobei: (Festlegung):

$$R_1 = Q'(0) = 3(P_2 - P_1), R_4 = Q'(1) = 3(P_4 - P_3)$$

damit ist:

$$G_H = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ R_1 \\ R_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = M_{HB} \cdot G_B$$

bei einsetzen in $Q(t)$:

$$\begin{aligned} Q(t) &= T \cdot M_H \cdot G_H = T \cdot M_H \cdot (M_{HB} \cdot G_B) \\ &= T \cdot (M_H \cdot M_{HB}) \cdot G_B = T \cdot M_B \cdot G_B \end{aligned}$$

und damit

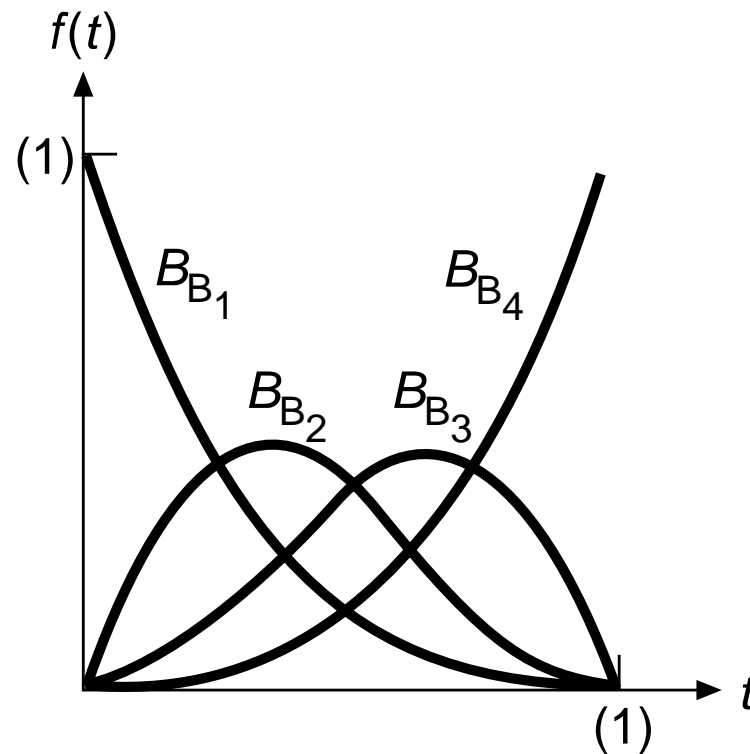
$$M_B = M_H \cdot M_{HB} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ausgeschrieben ergibt sich folgendes Polynom:

$$Q(t) = (1 - t)^3 P_1 + 3t(1 - t)^2 P_2 + 3t^2(1 - t) P_3 + t^3 P_4$$

Bernsteinpolynome (vom Grad 3):

$$B_{B_1} = (1 - t)^3, B_{B_2} = 3t(1 - t)^2, B_{B_3} = 3t^2(1 - t), B_{B_4} = t^3$$



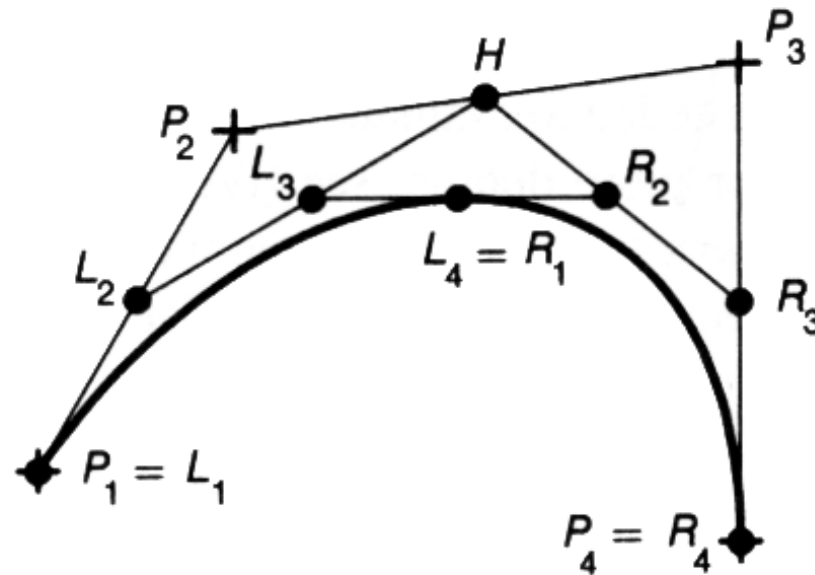
aus: Foley et al: Computer Graphics

Eigenschaften:

- Summe der Kurven: Einsfunktion
⇒ Kurve liegt in der konvexen Hülle der Kontrollpunkte
- Tangenten im Anfangs- und Endpunkt zeigen in Richtung der Differenz zu ihren Nachbarpunkten

De Casteljau-Algorithmus

- geometrische Auswertung der Punkte
- für $t = 0.4$ unterteile Strecken zwischen Kontrollpunkten jeweils im Verhältnis $0.4/1 - 0.4$



für $t = 0,5$:

aus: Foley et al: Computer Graphics

Probleme:

- bei vielen Kontrollpunkten (\Rightarrow hoher Grad) hoher Aufwand zur Berechnung der Kurve
- Veränderung eines Punktes verändert gesamte Kurve

Daher:

Kurven werden stückweise definiert

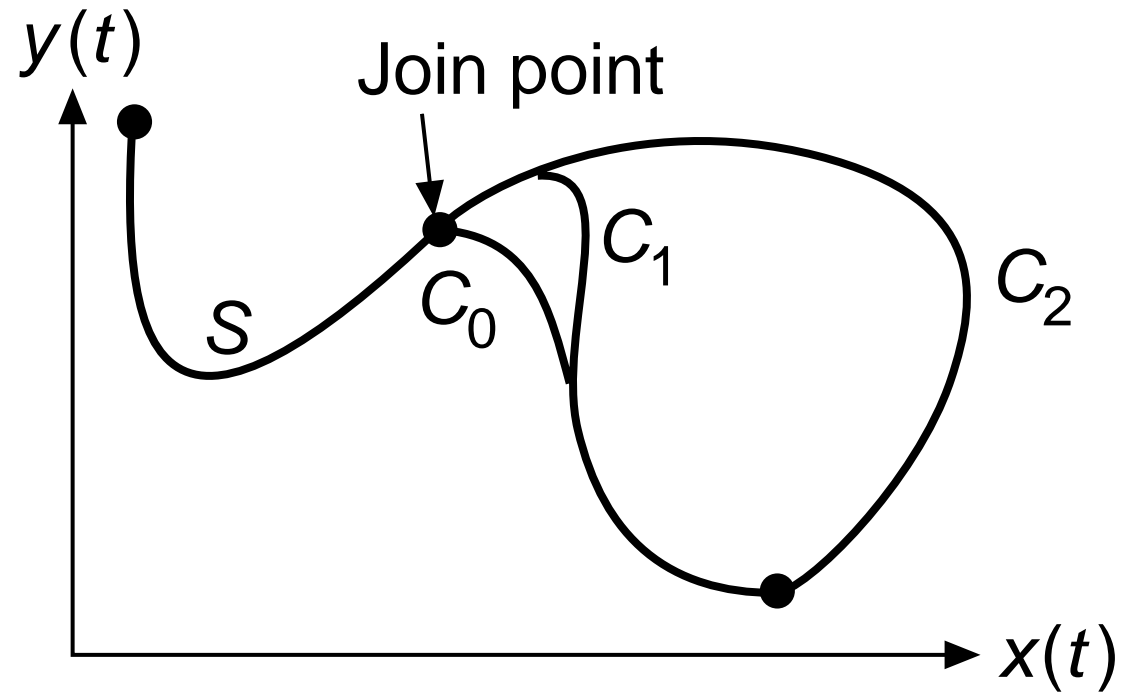
Gewünscht:

einfacher Mechanismus zur Definition einer Gesamtkurve aus vielen Teilkurven

Übergangsstellen

Zwei aneinander hängende Kurvensegmente sind:

- G^0 stetig \Leftrightarrow verbunden
- G^1 stetig \Leftrightarrow Steigungen stimmen überein
 $TV_1 = k TV_2$ [TV: Tangentenvektor]
- G^n stetig \Leftrightarrow n-ten Ableitungen stimmen in Richtung überein
(Bsp: Automobilbau $\rightarrow G^2$ -Stetigkeit erwünscht)
- C^n stetig \Leftrightarrow parametrische Stetigkeit;
n-te Ableitungen stimmen in Richtung und Länge überein



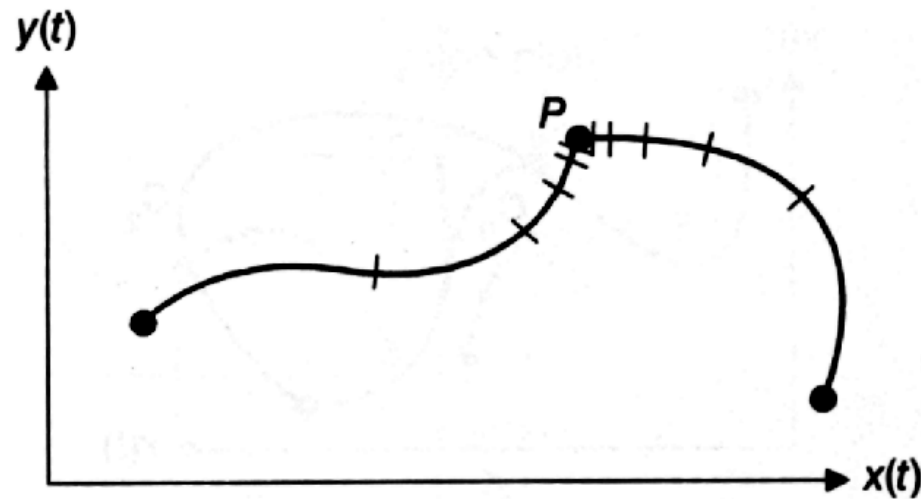
: aus Foley et al: Computer Graphics

Im Allgemeinen gilt:

$$C^1 \text{-Stetig} \Rightarrow G^1 \text{-Stetig}$$

Spezialfall:

$C^1 \rightarrow 0$ beidseitig eines Übergangs
 \Rightarrow stetig, aber nicht G^1 stetig (siehe Bild unten)



: aus Foley et al: Computer Graphics

B-Splines

- “Spline” Ursprung: Metallstreifen, die für technische Zeichnungen verwendet wurden (insbes. Flugzeuge, Schiffe)
- Streifen werden verformt durch Gewichte, hierbei erzeugt Material Stetigkeit bis zur zweiten Ableitung
- B-Splines: Nachempfindung physikalischer Effekte durch Basisfunktionen
- Neu: auch bei vielen Kontrollpunkten werden jeweils nur wenige zur Berechnung eines Kurvenpunktes verwendet

- kubischer B_Spline approximiert $m + 1$ Kontrollpunkte P_0, \dots, P_m mit $m - 2$ kubischen polynomialen Kurvensegmenten Q_3, \dots, Q_m
- der Laufparameter t läuft durch, für Q_i gilt: $t_i \leq t \leq t_{i+1}$
- Intern: $t_{lokal} = t - t_i$, damit gleiche Domäne für alle Q_i
- zu Q_i zählen die Kontrollpunkte P_{i-3}, \dots, P_i , die Anschlusspunkte $Q(t_i), Q(t_{i+1})$ heissen auch Knoten

Lokalisierung der Beschreibung:
Geometrievektor

$$G_B \rightarrow G_{BS_i} = \begin{pmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{pmatrix}$$

Laufparameter:

$$T \rightarrow T_i = ((t - t_i)^3 \ (t - t_i)^2 \ (t - t_i)1)$$

und damit

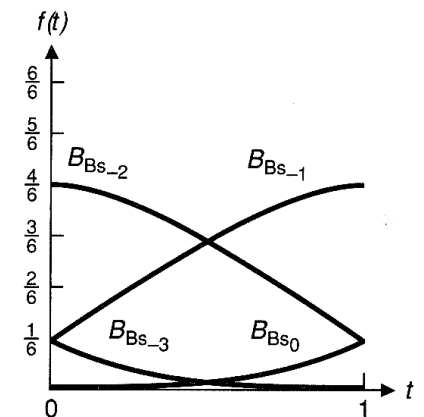
$$Q_i(t) = T_i \cdot M_{Bs} \cdot G_{BS_i}$$

Matrix-Schreibweise für B-Splinekurven

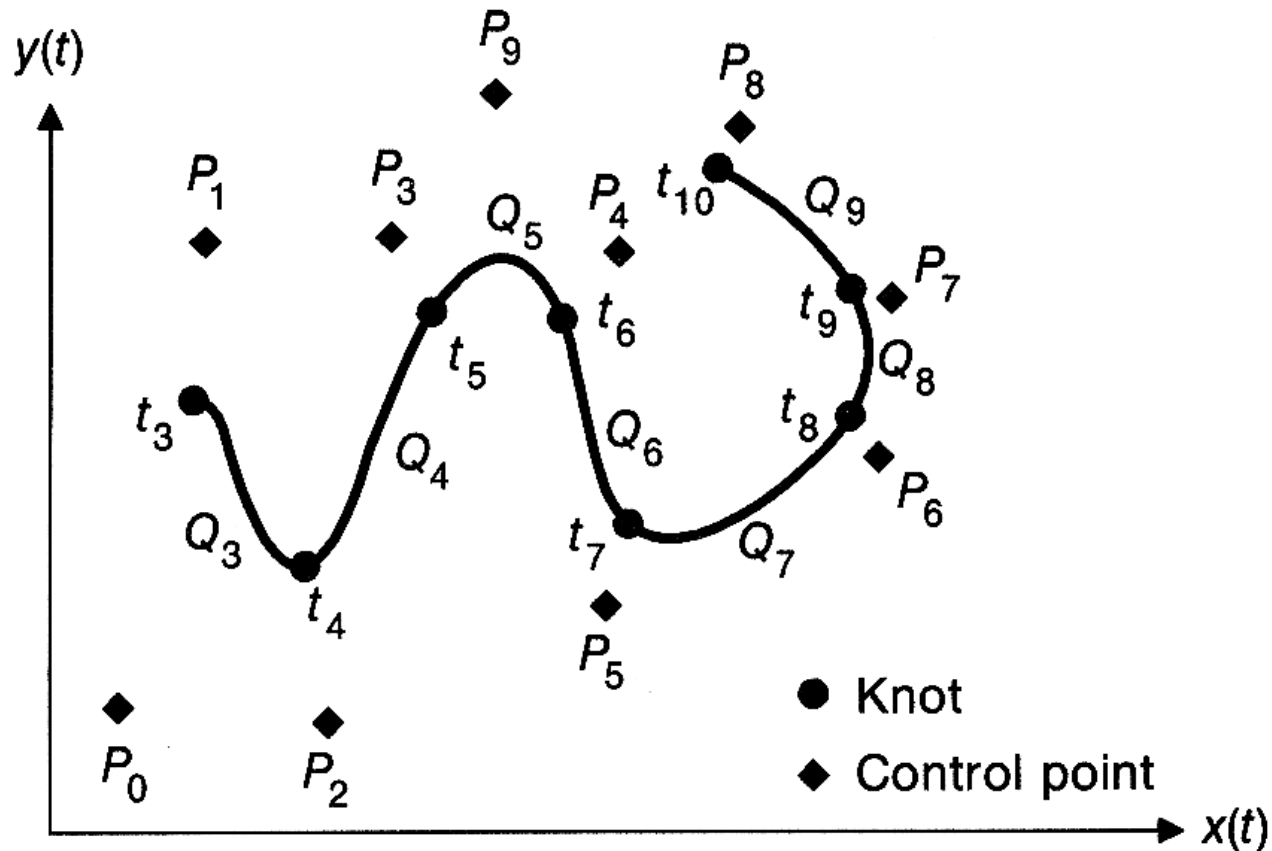
$$\begin{aligned} Q(t) &= T_i \cdot M_{BS} \cdot G_{BS_i} \\ &= ((1-t)^3, (1-t)^2, (1-t), 1) \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot G_{BS_i} \end{aligned}$$

ausgeschrieben und vereinfacht:

$$Q(t) = \frac{1}{6} \left(\underbrace{(1 - t^3)}_{B_{BS_3}(t)} P_{i-3} + \underbrace{(3t^3 - 6t^2 + 4)}_{B_{BS_2}(t)} P_{i-2} + \underbrace{(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1)}_{B_{BS_1}(t)} P_{i-1} + \underbrace{(t^3)}_{B_{BS_0}(t)} P_i \right)$$



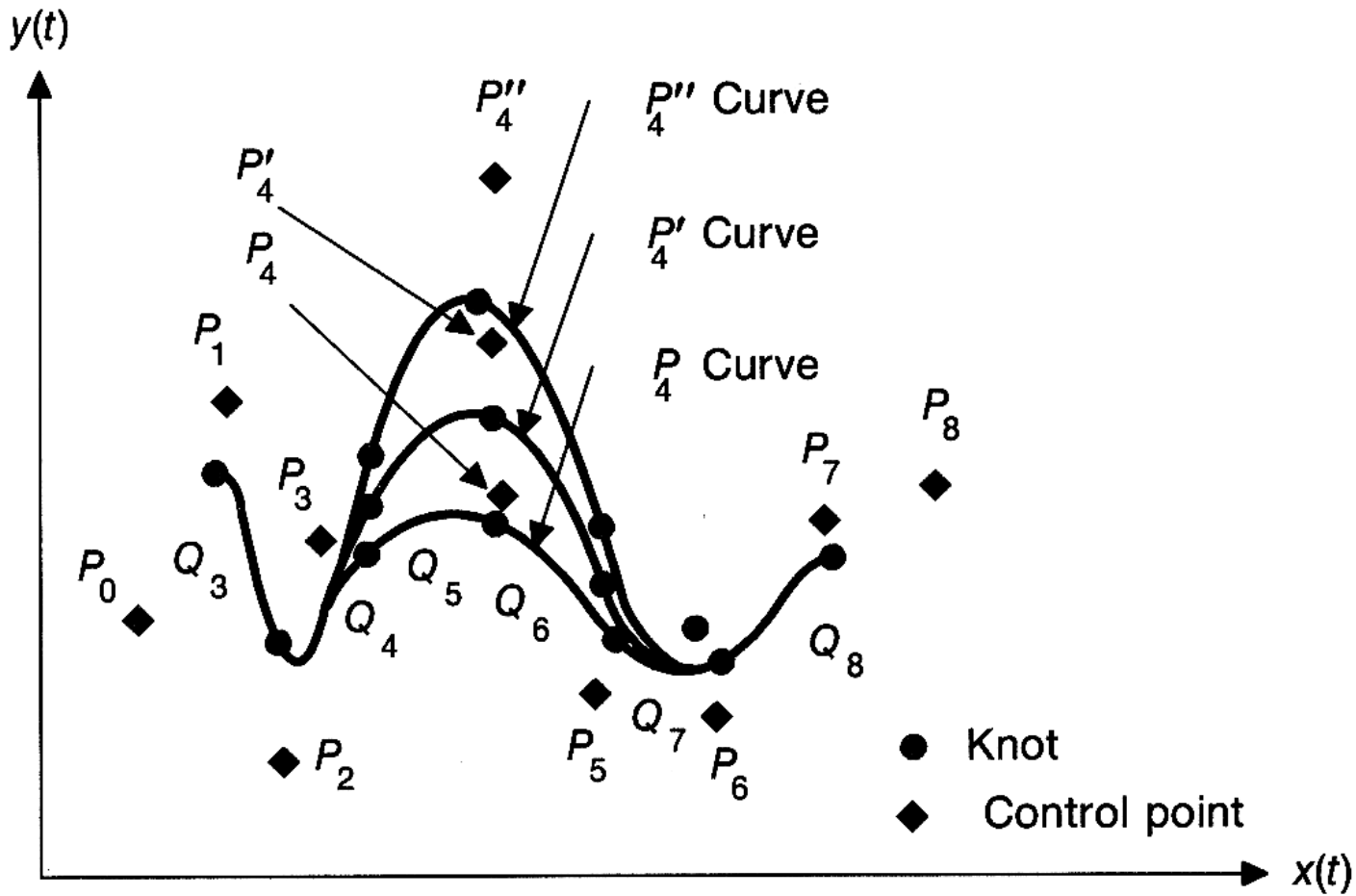
Beispiel einer B-Spline Kurve



aus: Foley et al.: Computer Graphics

→ alle Kontrollpunkte werden nur approximiert

Veränderung eines Kontrollpunkts



aus: Foley et al.: Computer Graphics

Uniforme B-Splines

Uniforme Parametrisierung:

t durchläuft die Segmente gleichmäßig

keine Mehrfachpunkte

Daher Erweiterung:

nicht-uniforme Splines

Nicht-uniforme Splines

- t darf beliebig gewählt werden
- Mehrfachknoten
- ⇒ Kurve wird an Knoten gezogen
(kubisch: Dreifachknoten wird interpoliert, aber nur noch G^0 -Stetigkeit)
- Hier keine expliziten Blendingfunktionen,
Funktion hängt vom Interval ab
- ⇒ Rekursive Definition

nullte Ordnung:

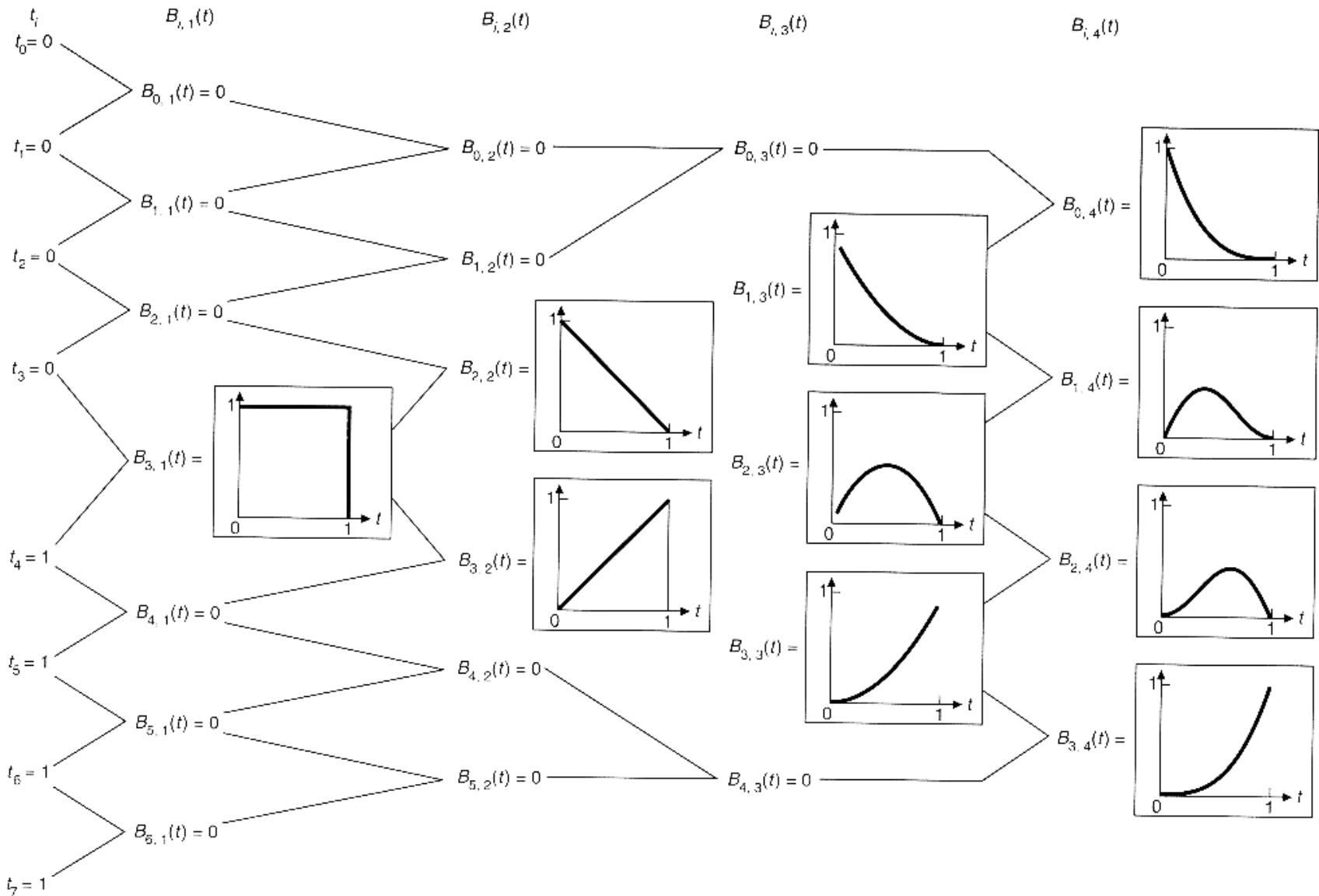
$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für höhere Ordnungen rekursive Definition:

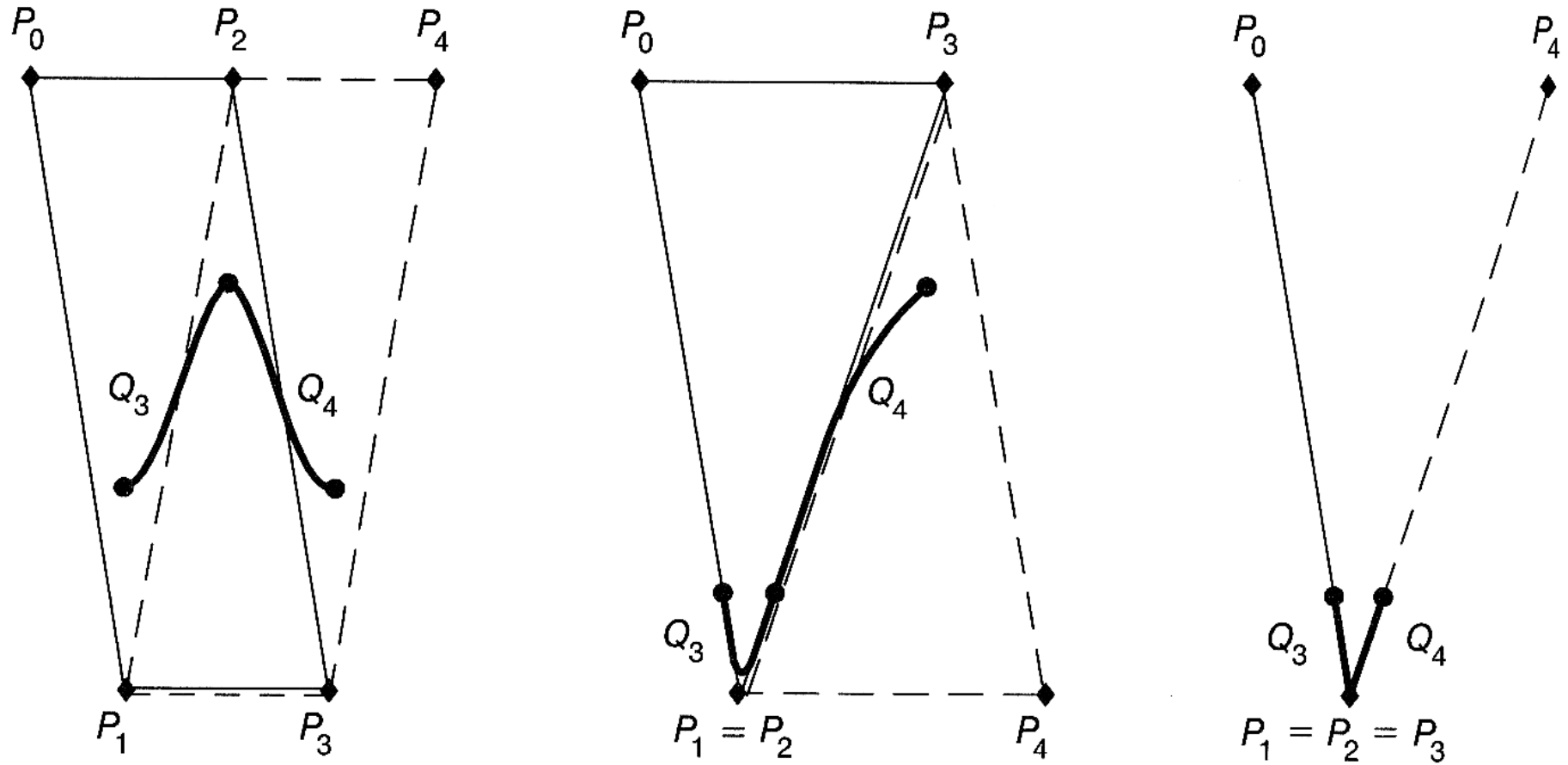
$$N_i^r(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+r} - t_i} N_i^{r-1}(t) + \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{r-1}(t)$$

hierbei Definition: Brüche Null, wenn Nenner Null

für Knotenvektor $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$ sind die Blending-Funktionen:



Effekt bei Mehrfachkontrollpunkten:



aus: Foley et al.: Computer Graphics

NURBS (Nonuniform Rational B-Splines)

→ gebräuchlichste Form:

$$x = \frac{x(t)}{w(t)} \quad y = \frac{y(t)}{w(t)} \quad z = \frac{z(t)}{w(t)}$$

in homogenen Koordinaten: $(x(t), y(t), z(t), w(t))$

→ invariant bei Rotation, Skalierung, Translation und Projektion

⇒ nur Kontrollpunkte müssen projiziert werden

(letzteres gilt nicht für nichtrationale Kurven)

→ Formen wie Kreise oder Konus können spezifiziert werden

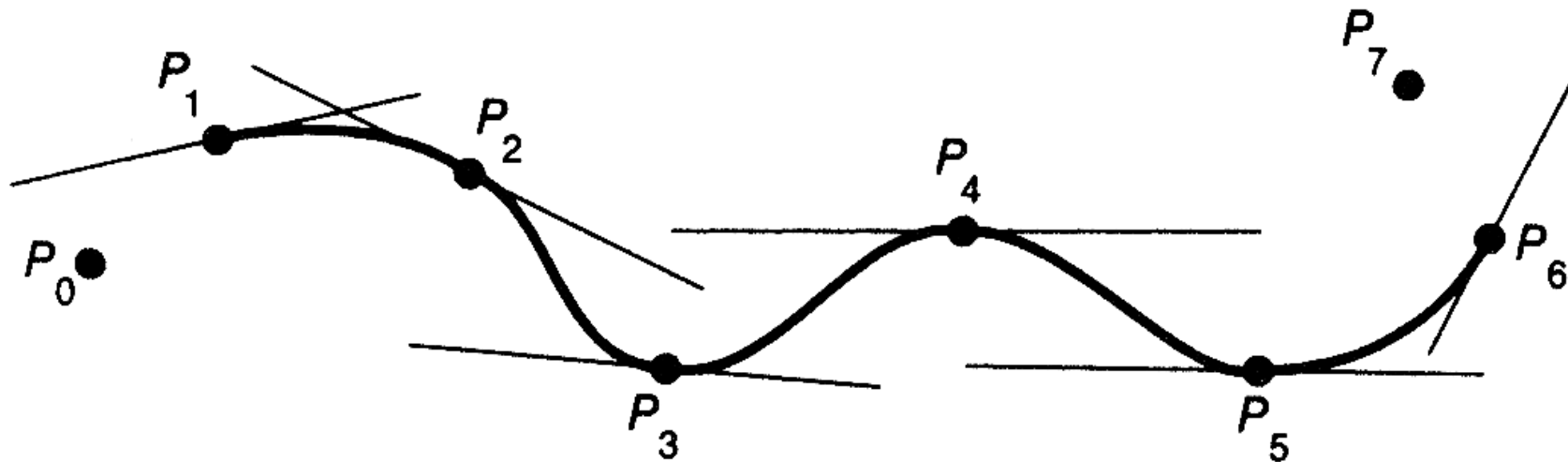
Catmull-Rom Splines

→ Interpolieren die Kontrollpunkte P_i

→ Tangente im Kontrollpunkt P_i parallel zur Strecke $\overline{P_{i-1}P_{i+1}}$

$$Q_i(t) = \frac{1}{6}T_i \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot G_i$$

Interpolation mit Catmull-Rom Splines:



aus: Foley et al.: Computer Graphics

Vergleich verschiedener kubischer Kurvenrepräsentationen:

	Hermite	Bézier	Uniform B-spline	Uniformly shaped β -spline	Nonuniform B-spline	Catmull–Rom	Kochanek–Bartels
Convex hull defined by control points	N/A	Yes	Yes	Yes	Yes	No	No
Interpolates some control points	Yes	Yes	No	No	No	Yes	Yes
Interpolates all control points	Yes	No	No	No	No	Yes	Yes
Ease of subdivision	Good	Best	Avg	Avg	High	Avg	Avg
Continuities inherent in representation	C^0 G^0	C^0 G^0	C^2 G^2	C^0 G^2	C^2 G^2	C^1 G^1	C^1 G^1
Continuities easily achieved	C^1 G^1	C^1 G^1	C^2 G^{2*}	C^1 G^{2*}	C^2 G^{2*}	C^1 G^1	C^1 G^1
Number of parameters controlling a curve segment	4	4	4	6†	5	4	7

*Except for special case discussed in Section 11.2.

†Four of the parameters are local to each segment, two are global to the entire curve.