Berechnung von Formfaktoren

$\rightarrow$ Formfaktor ist eine Funktion in Abhängigkeit der Geometrie

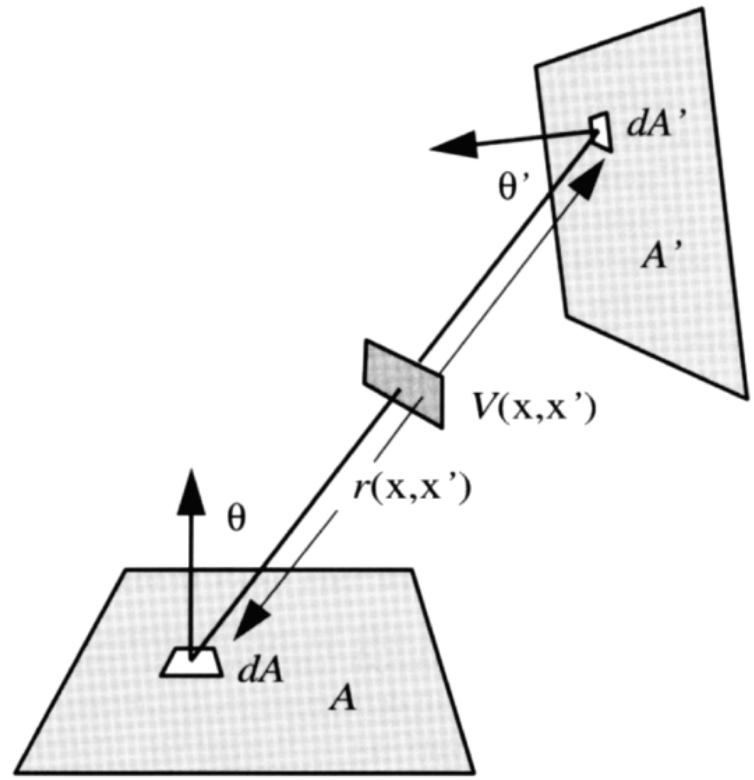
$\rightarrow$ ist unabhängig von reflektierenden oder emittierenden Eigenschaften (ρ) der Oberflächen

$\rightarrow$ ist abhängig von Abstand und Orientierung zweier Elemente, (sowie der Sichtbarkeit zwischen diesen Elementen !)

Bezeichnung:

F_{ij} : Anteil Licht, das von A_i ausgehend A_j trifft

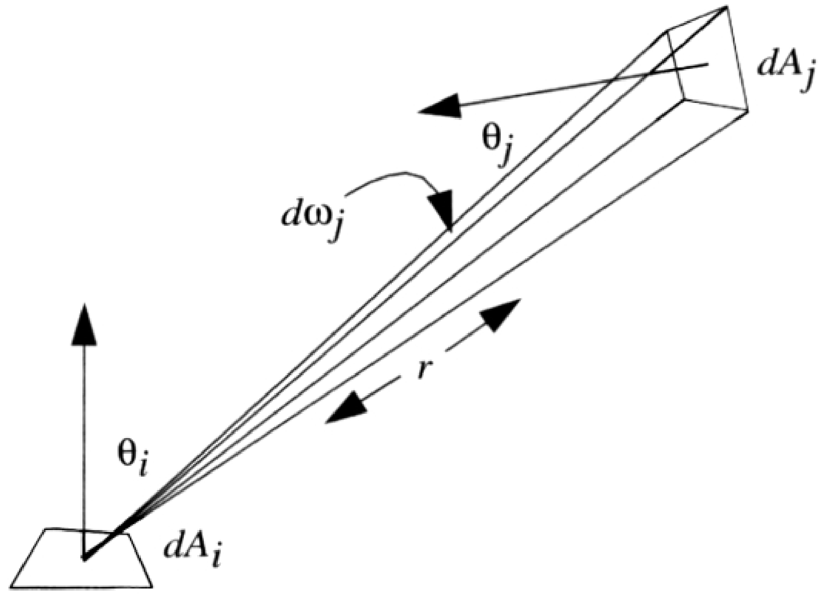
→ Darstellung als zweifaches Flächen-Integral:



aus: Cohen/Wallace: Radiosity and Realistic Image Synthesis

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos\theta \ \cos\theta'}{\pi \ r^2} V_{ij} \, dA_j \, dA_i$$

$\rightarrow$ Darstellung als zweifaches Fläche-Raum-Integral:



aus: Cohen/Wallace: Radiosity and Realistic Image Synthesis

$$d\omega_j = \frac{\cos\theta_j}{r^2} dA_j$$

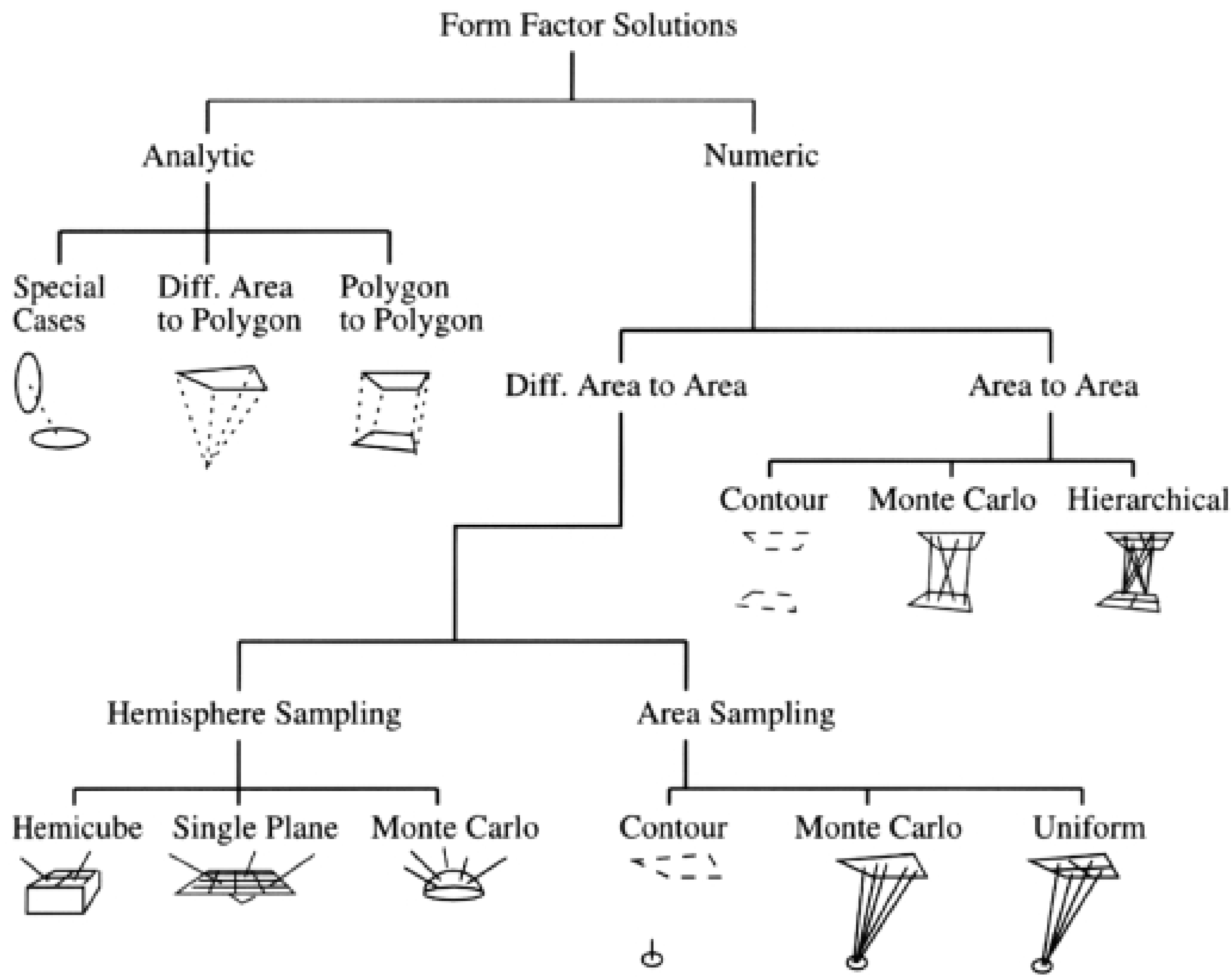
$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{\Omega} \frac{\cos\theta_i}{\pi} V_{ij}\, d\omega_j\, dA_i$$

→ Darstellung als zweifaches Randintegral

(Anwendung des Stockes'schen Satzes, das Flächenintegral wird in diesem Fall zu einem Randintegral)

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi\, A_i} \oint_{C_i} \oint_{C_j} ln\, r\; dx_i\, dx_j + ln\, r\; dy_i\, dy_j + ln\, r\; dz_i\, dz_j$$

Generelle Berechnungsmethoden



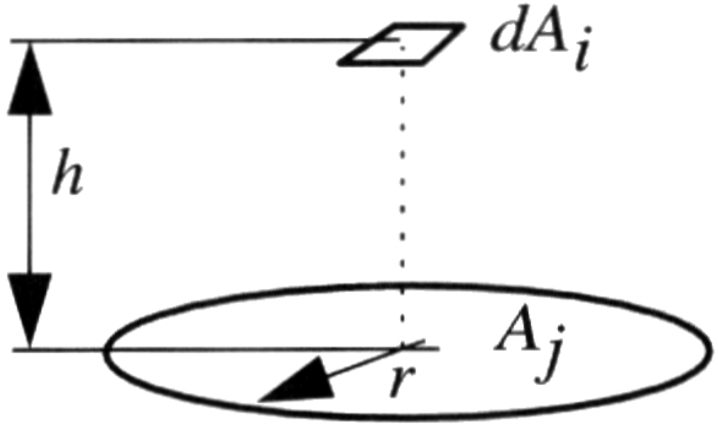
aus: Cohen/Wallace: Radiosity and Realistic Image Synthesis

Analytische Methoden

→ für einfache Elemente (Element-Element) und für differentielle Flächen

→ vollständige Sichtbarkeit wird vorausgesetzt

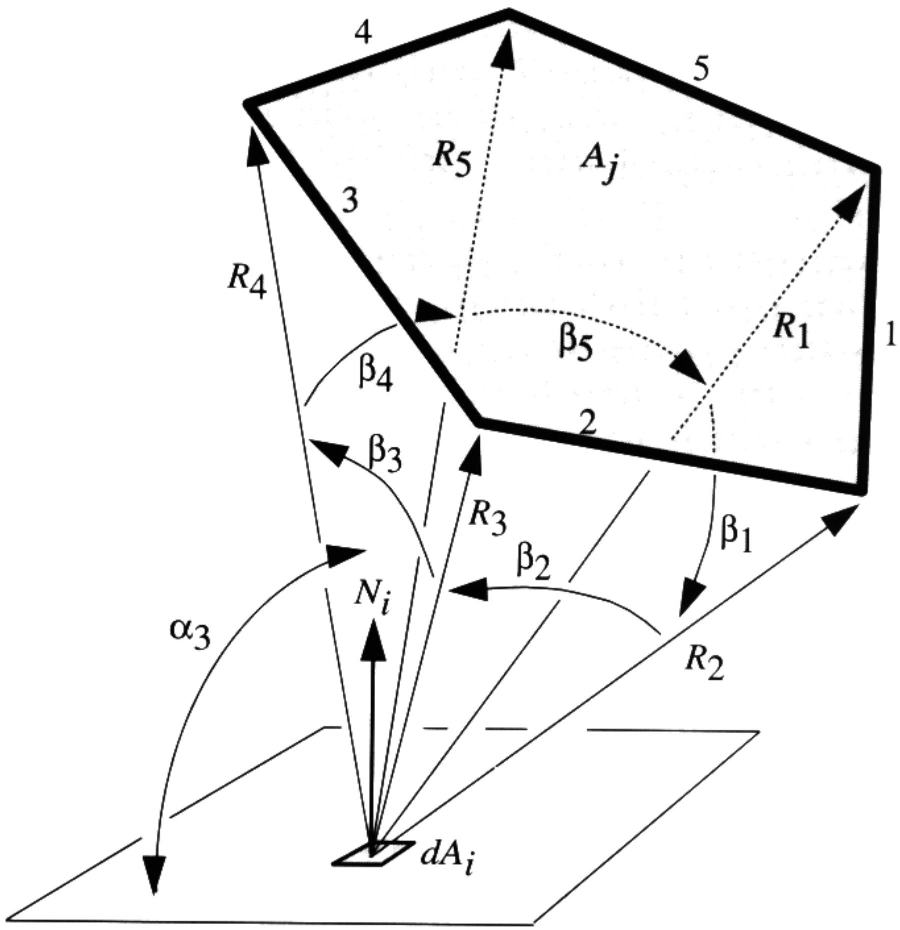
1. Differentielle Fläche auf Kreis



$$F_{ij} = \frac{r^2}{h^2 + r^2}$$

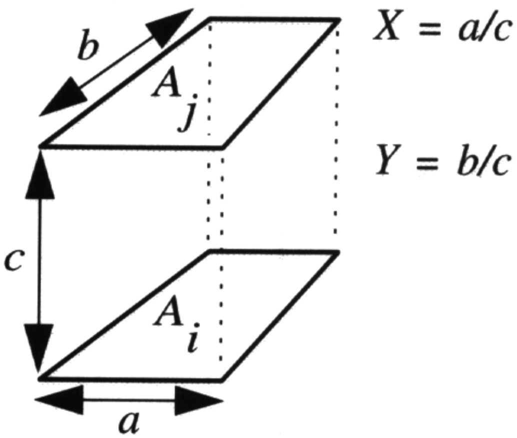
aus: Cohen/Wallace: Radiosity and Realistic Image Synthesis

2. Differentielle Fläche auf Polygon (kommt häufig vor)



$$F_{dA_i \to A_j} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cos \alpha_i$$

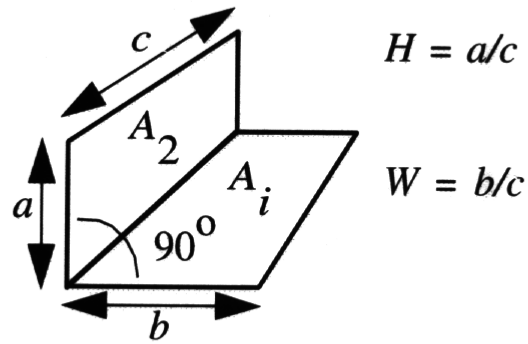
3. Formfaktor zwischen parallelen Rechtecken



aus: Cohen/Wallace: Radiosity and Realistic Image Synthesis

$$F_{ij} = \frac{2}{\pi XY}\left\{\ln\left[\frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+X^2+Y^2}\right]^{1/2} + Y\sqrt{1+X2}\tan^{-1}\left(\frac{Y}{\sqrt{1+X^2}}\right) - X\tan^{-1}X - Y\tan^{-1}Y\right\}$$

4. Formfaktor zwischen senkrechten Rechtecken

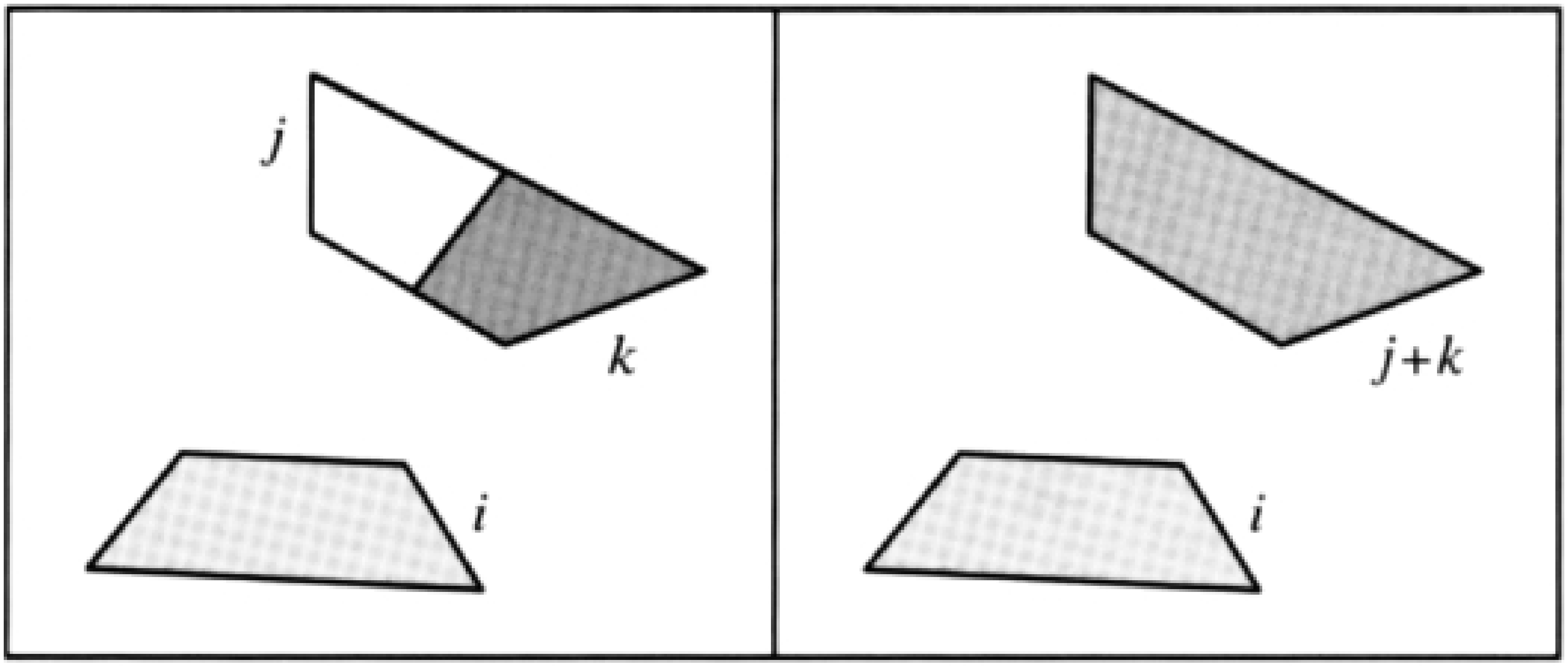


aus: Cohen/Wallace: Radiosity and Realistic Image Synthesis

$$F_{ij} = \frac{1}{\pi W} \left\{ W \tan^{-1} \frac{1}{W} + H \tan^{-1} \frac{1}{H} - \sqrt{H^2 + W^2} \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{H^2+W^2}} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \ln \left[\frac{(1+W^2)(1+H^2)}{1+W^2+H^2} \left(\frac{W^2(1+W^2+H^2)}{(1+W^2)(W^2+H^2)} \right)^{W^2} \left(\frac{H^2(1+H^2+H^2)}{(1+H^2)(W^2+H^2)} \right)^{H^2} \right] \right\}$$

→ Algebraische Gesetze für Formfaktoren



$$F_{i,(j+k)} = F_{i,j} + F_{i,k} \qquad F_{(j+k),i} = \frac{F_{j,i}A_j + F_{k,i}A_k}{A_j + A_k}$$

aus: Cohen/Wallace: Radiosity and Realistic Image Synthesis

Numerische Berechnung von Formfaktoren

Gaußsche Quadratur:

$$H = \int_X h(x)\,dx \approx \hat{H} = \sum_{k=1}^{n} \omega_k\, h(x_k)$$

mit: ω_k: Gewichte, x_k: Stützstellen

Formfaktorberechnung (Zweifach-Integral):

$\longrightarrow$ hierbei Stützpunkte entweder Punktpaare $(x_k, x'_k) \in (R^2 \times R^2)$
(im Falle von Fläche-Fläche Integralen)

$\longrightarrow$ oder Punkt-Vektorpaare $(x_k, \vec{\omega}) \in (R^2 \times S^2)$
(für Fläche-Raum-Integrale)

$\longrightarrow$ beide Formen der Integrale haben dasselbe äußere Integral, daher:

1. Wähle Punkte x_i auf A_i
2. Werte das innere Integral dA_j für jeden Punkt aus

$\longrightarrow$ oft wird nur ein Punkt x_i verwendet

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{\Omega} G_{i\omega}\, d\omega\, dA_i \approx \int_{\Omega} G_{i\omega}\, d\omega \quad \text{für Stützpunkt } x_i$$

ansonsten: Normalisierte Summe von Punten x_i

Wie kann über Hemisphäre gesampelt werden?

Geometrischer Kern des Integrals:

$$G_{i\omega} = \frac{\cos\theta_i}{\pi} V_{ij} \quad \text{wobei} \quad V_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{Punkt } x_i \text{ sieht Fläche } A_j \text{ nicht} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ aufwändig: Sichtbarkeitsbestimmung

$\longrightarrow$ FF von Element i zu allen anderen Elementen wird benötigt

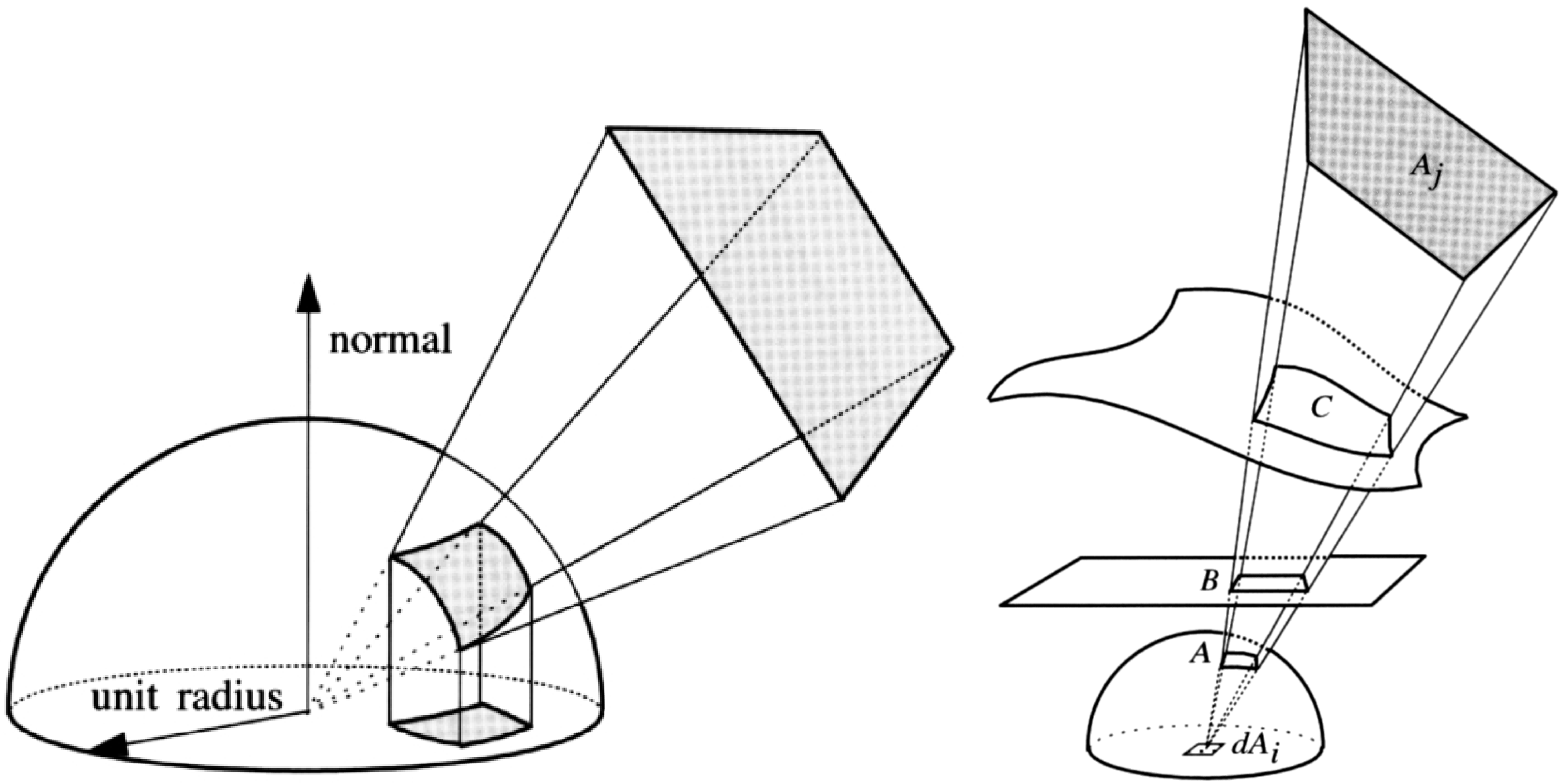
$\Rightarrow$ Sichtbarkeitsberechnung einmal durchführen

$\Rightarrow$ FF entstehen durch Aufsummieren differentieller Formfaktoren (F_{ik} wird verändert, wenn k das Element ist, das in Richtung $d\vec{\omega}$ von dA gesehen wird)

$\Rightarrow$ Sampling der Hemisphäre erzeugt eine Zeile in K

Nusselt-Analogie

→ Formfaktor von dA_i auf Element A_j ist proportional zur Fläche der Doppelprojektion auf die Kreisscheibe



aus: Cohen/Wallace: Radiosity and Realistic Image Synthesis

$\longrightarrow$ Fläche auf Einheits-Hemisphäre entspricht Raumwinkel ($d\vec{\omega} \approx \frac{\cos\theta_j}{r^2}$)

$\longrightarrow$ Projektion auf Grundfläche entspricht $\cos\theta_i$ (π durch Kreisfläche)

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos\theta_i}{\pi} \cdot \frac{\cos\theta_j}{r^2}$$

hierbei sind:

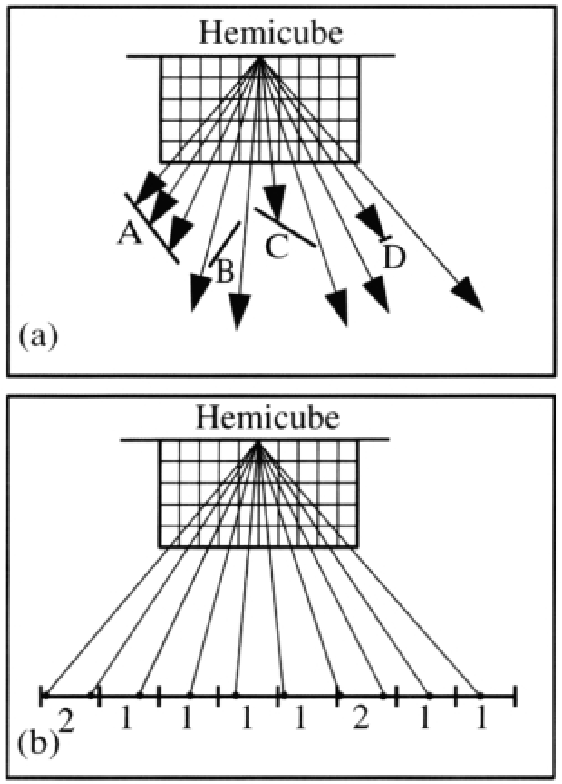
$\frac{\cos\theta_i}{\pi}$: "$G_{i\omega}$" ohne Sichtbarkeit

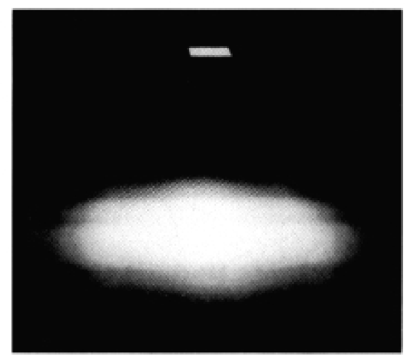
$\frac{\cos\theta_j}{r^2}$: "äußerer" Term

Hemicube-Verfahren

→ Ersetze Kreis durch Würfel mit kleinen Zellen

→ Sichtbarkeit bestimmen (über Z-Buffer und ID-Buffer),





aus: Cohen/Wallace: Radiosity and Realistic Image Synthesis

$\longrightarrow$ für jedes x_i für alle Seitenflächen Sichtbarkeit bestimmen

$\Rightarrow$ Hardware einsetzbar

$\longrightarrow$ Berechnung des Formfaktors:

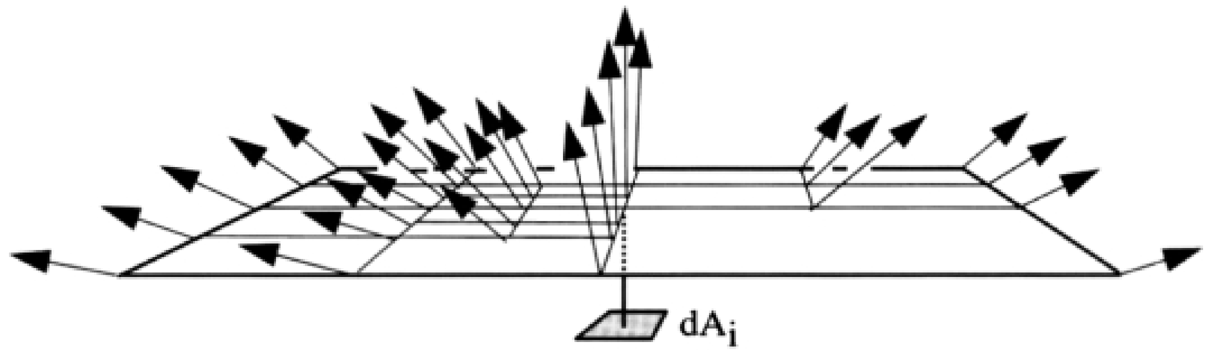
$$F_{ij} = \text{Cosinusterm} \, \frac{\text{Anzahl Pixel für Fläche } A_j}{\text{Gesamtzahl Pixel}}$$

$\longrightarrow$ pro Schritt werden alle F_{ij} ermittelt

$\longrightarrow$ Problem: Aliasing (Sampling-Probleme)

Sillions Verbesserung

→ statt Würfel nur noch eine Fläche (Single plane method)



aus: Cohen/Wallace: Radiosity and Realistic Image Synthesis

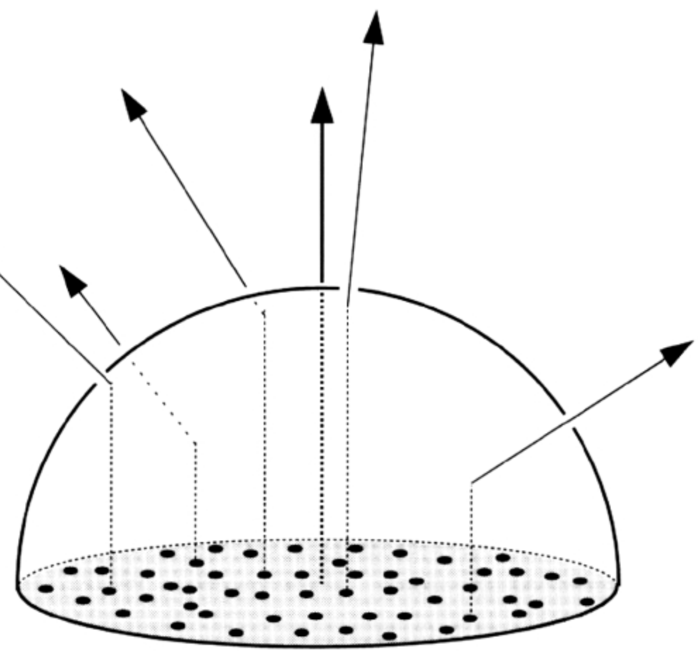
→ Ersetze Z-Buffer durch Algorithmus von Warnock

⇒ flexibler, geringere Aliasprobleme

→ Elemente am Horizont werden übergangen
(nicht so schlimm, sie tragen wenig zur Gesamthelligkeit bei)

Monte-Carlo-Raytracing

$\longrightarrow$ reverse Nusselt-Analogie



aus: Cohen/Wallace: Radiosity and Realistic Image Synthesis

$\longrightarrow$ flexibel

$\longrightarrow$ wichtige Teile werden genauer gesampelt

Flächensampling

$\longrightarrow$ Hemispherensampling dann effizient, wenn FF von einzelnem Punkt zu allen Flächen berechnet werden muß

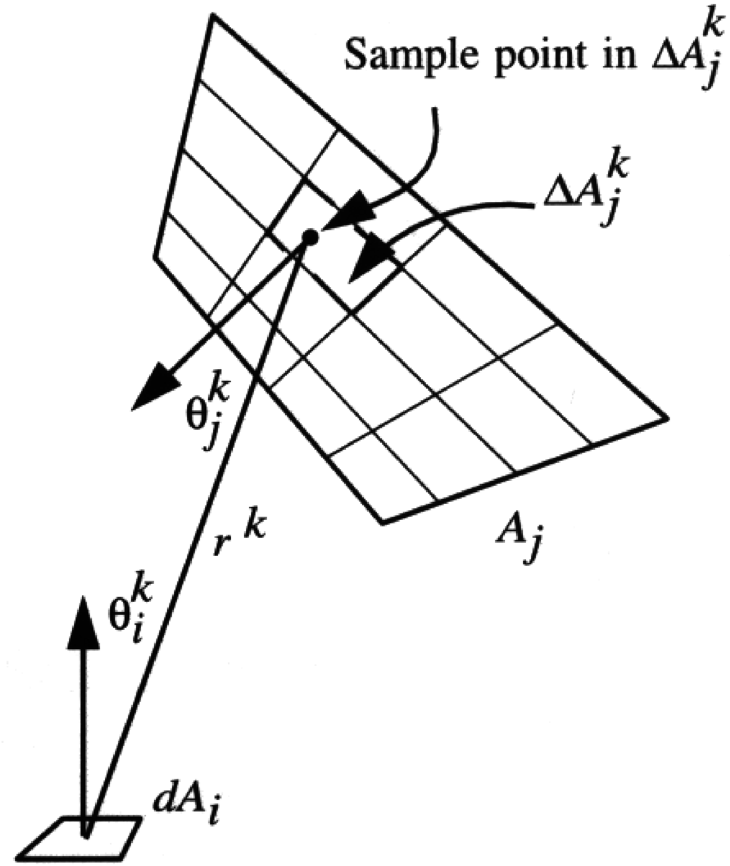
$\longrightarrow$ oftmals: FF von einem Elementpaar muß bestimmt werden

$$F_{dA_i \longrightarrow\ A_j} = \int_{A_j} \frac{\cos\theta_i\ \cos\theta_j}{\pi\, r^2} V_{ij}\ dA_j$$

$\longrightarrow$ zwei Möglichkeiten: Monte-Carlo Integration oder Subdivision

Monte-Carlo-Integration:

$\longrightarrow$ bestimme Punkte auf A_j und sammle FF-Teile auf



aus: Cohen/Wallace: Radiosity and Realistic Image Synthesis

Flächen-Unterteilung (Subdivision)

1. Möglichkeit: uniforme Unterteilung, einfache Formel für Teilflächen

$$F_{dA_i \rightarrow A_j} = \int_{A_j} \frac{\cos\theta_i \ \cos\theta_j}{\pi \, r^2} V_{ij} \, dA_j$$

wird approximiert durch:

$$F_{dA_i \rightarrow A_j} \approx \sum_{k=1}^{m} \frac{\cos\theta_i^k \ \cos\theta_j^k}{\pi \, (r^k)^2} V(dA_i, \Delta A_j^k) \, \Delta A_j^k$$

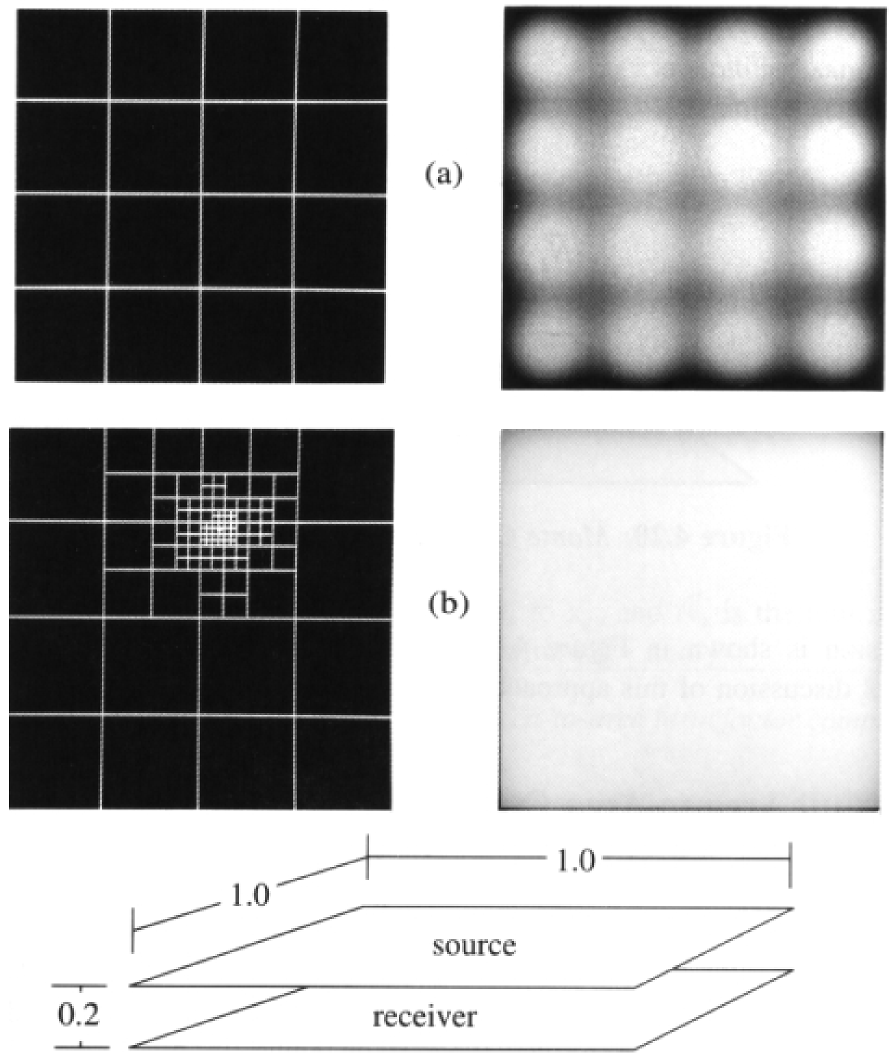
$\rightarrow$ immer noch Aliasing-Probleme

2. Möglichkeit: adaptive Unterteilung

$\rightarrow$ Fläche wird unterteilt, wenn Änderung pro Fläche zu groß

$\Rightarrow$ bei hohen Gradienten wird öfter unterteilt

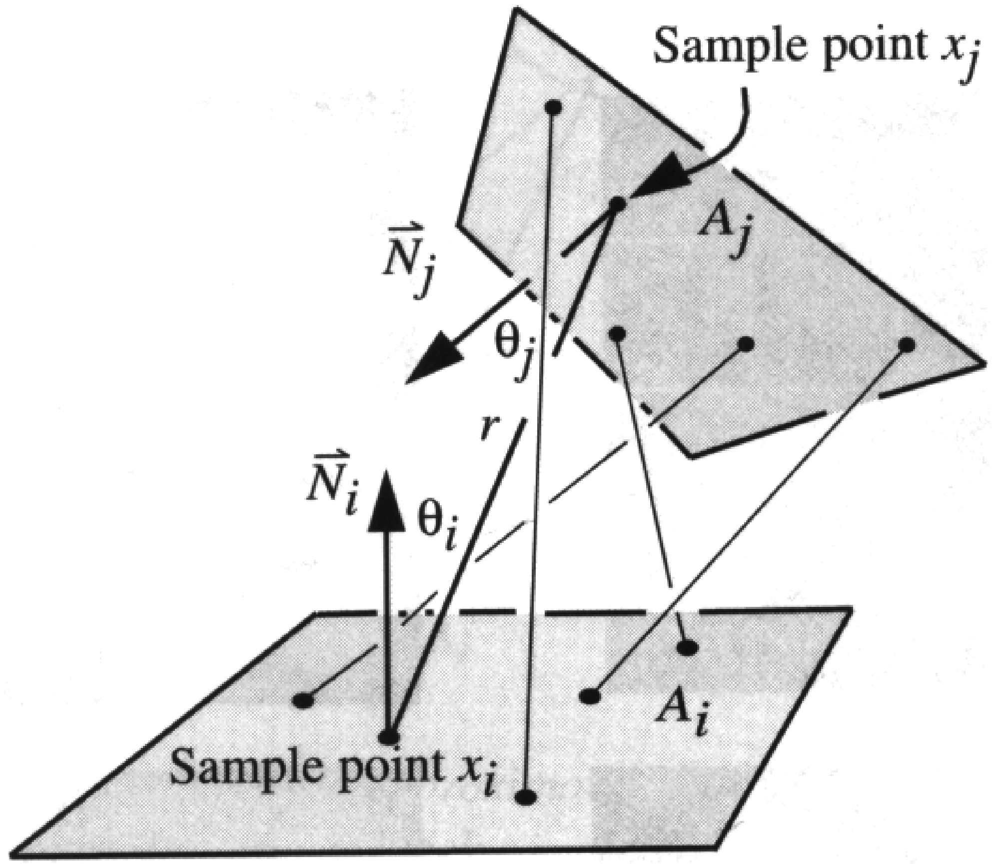
$\Rightarrow$ höhere Genauigkeit



aus: Cohen/Wallace: Radiosity and Realistic Image Synthesis

Monte-carlo Fläche-Fläche Quadratur

$\rightarrow$ Erweiterung der bisherigen $dA_i \rightarrow A_j$ Methoden auf $A_i \rightarrow A_j$



aus: Cohen/Wallace: Radiosity and Realistic Image Synthesis