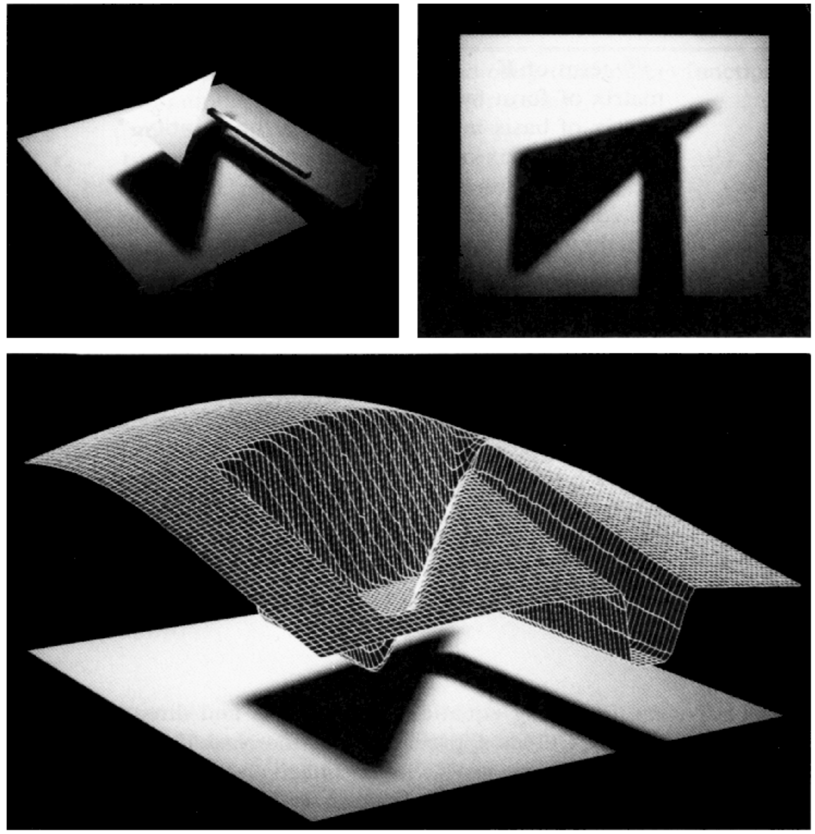
Radiosity



Schattenwurf auf den Boden mit Radiosity-Funktion über der Fläche

aus: Cohen/Wallace: Radiosity and Realistic Image Synthesis

FEM - Lösung der Rendering-Gleichung

Wiederholung:

$$L(x,\vec{\omega}) = L_e(x,\vec{\omega}) + \int_S f_r(x)\, L(x,\vec{\omega})\, G(x,x')\, V(x,x')\, dA$$

$\rightarrow$ Radiosity: alle Flächen sind Lambertsche Reflektoren
(diffus, in alle Richtungen gleich)

$$\rightarrow \quad L(x,\vec{\omega}) = L_e(x,\vec{\omega}) + \frac{B(x)}{\pi} \int_S L(x,\vec{\omega})\, G(x,x')\, V(x,x')\, dA$$

$\Rightarrow$ abgestrahlte Energie ist in alle Richtungen gleich

$$L(x,\vec{\omega}) \rightarrow \frac{B(x)}{\pi} \qquad L_e(x,\vec{\omega}) \rightarrow \frac{E(x)}{\pi}$$

$$B(x) = E(x) + \rho(x) \int_S B(x') \underbrace{\frac{G(x,x')\,V(x,x')}{\pi}}_{G(x,x')} \, dA'$$

(vereinfachte Notation)

$$B(x) = E(x) + \rho(x) \int_S B(x')\, G(x,x')\, dA'$$

Es gilt:

- $B(x)$ ist skalar
- $B(x)$ abhängig vom Ort auf jeder Fläche
- $B(x)$ frequenzabhängig
  ($\rightarrow$ Berechnung für diskrete Werte, RGB-Bild: drei Frequenzen)
- $B(x)$ stückweise stetig

Lösung:

a) Beobachterabhängige Verfahren (Raytracing, Monte Carlo)

b) Beobachterunabhängige Verfahren (FEM)
   $\rightarrow$ Radiosity

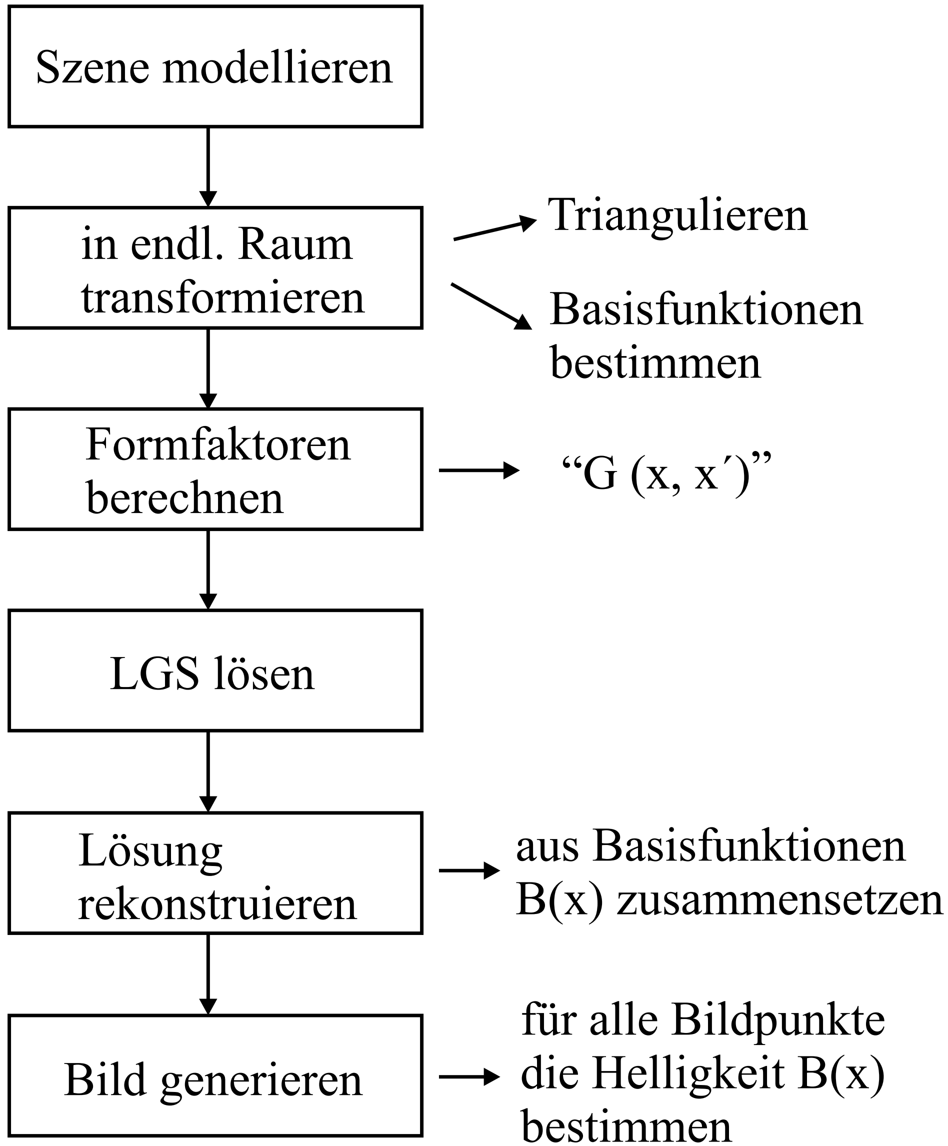
FEM - Methode

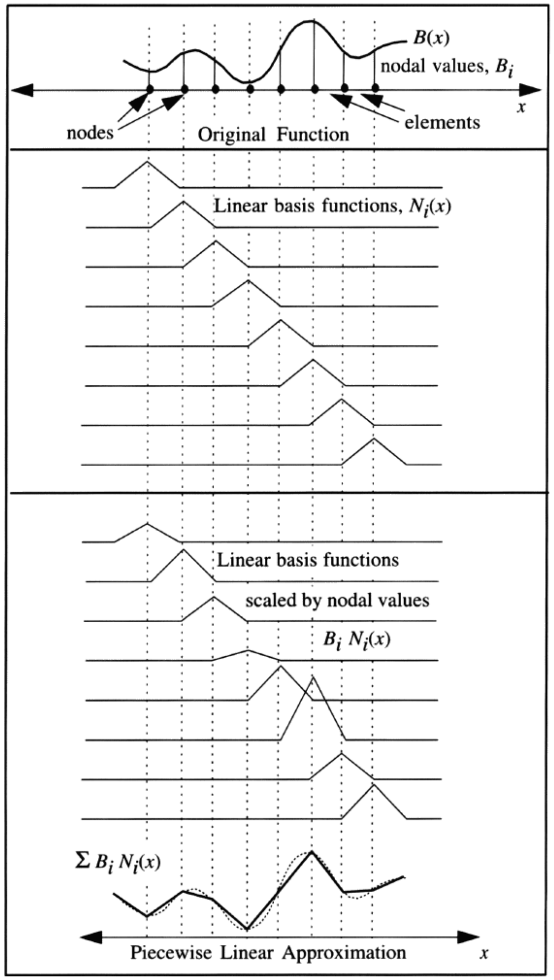
$\Rightarrow$ kontinuierliche Funktion (hier $B(x)$) wird im Wertebereich in Teilbereiche zerlegt

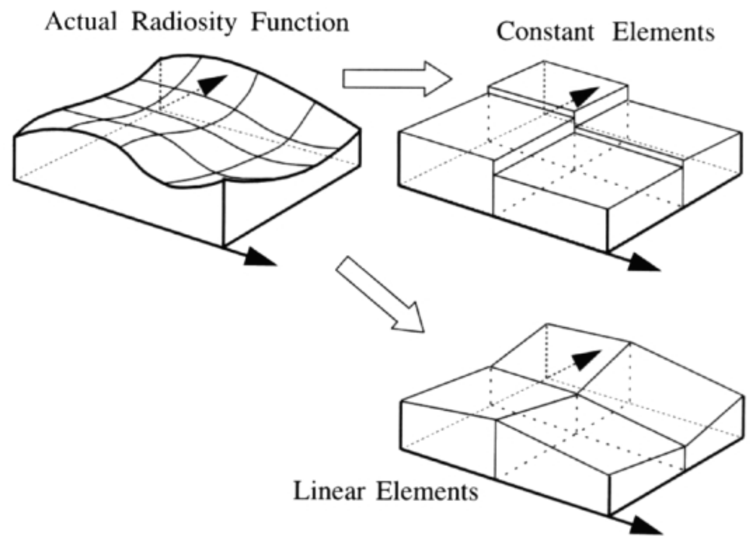
$\rightarrow$ Darstellung der Teilbereiche durch Kombination von Basisfunktionen

$\rightarrow$ Koeffizienten der Basisfunktionen werden für endliche Anzahl von Orten bestimmt (Knoten)

$\rightarrow$ Knoten sind Unbekannte im LGS (bei beliebigen Funktionen generelles Gleichungssystem)


Szene modellieren
in endl. Raum transformieren
Triangulieren
Basisfunktionen bestimmen
Formfaktoren berechnen
“G (x, x′)”
LGS lösen
Lösung rekonstruieren
aus Basisfunktionen B(x) zusammensetzen
Bild generieren
für alle Bildpunkte die Helligkeit B(x) bestimmen





Lineare Interpolation im 1D, Konstante und lineare Interpolation im 2D

aus: Cohen/Wallace: Radiosity and Realistic Image Synthesis

Wie kommt man auf das LGS ?

$\rightarrow B(x)$ als Summe von n Basisfunktionen $N_i(x)$

$$B(x) \approx \tilde{B}(x) = \sum_{i=1}^{n} B_i \, N_i(x)$$

a) N_i konstant:

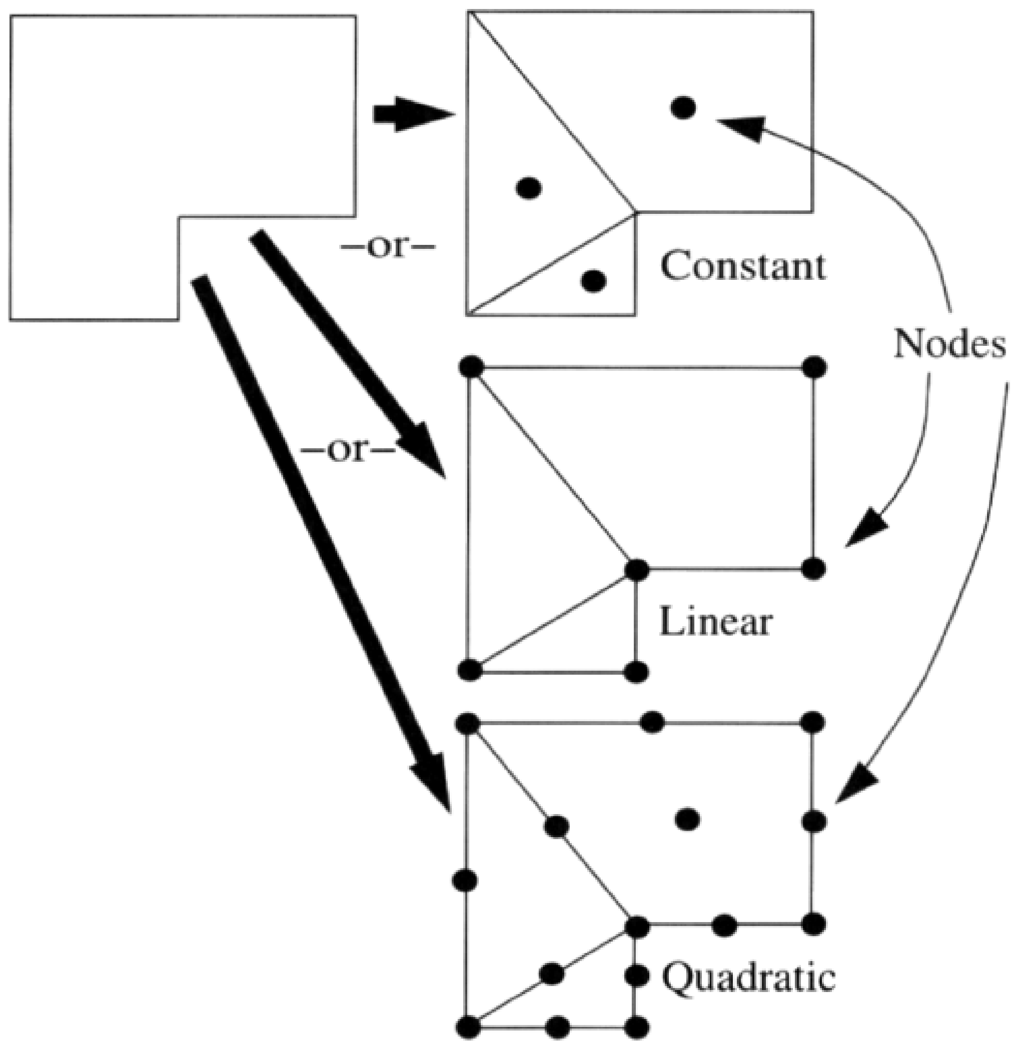
$$N_i = \begin{cases} 1 & \text{x ist innerhalb} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\rightarrow B(x)$ bzw. B_i wird am Mittelpunkt des Dreiecks bestimmt

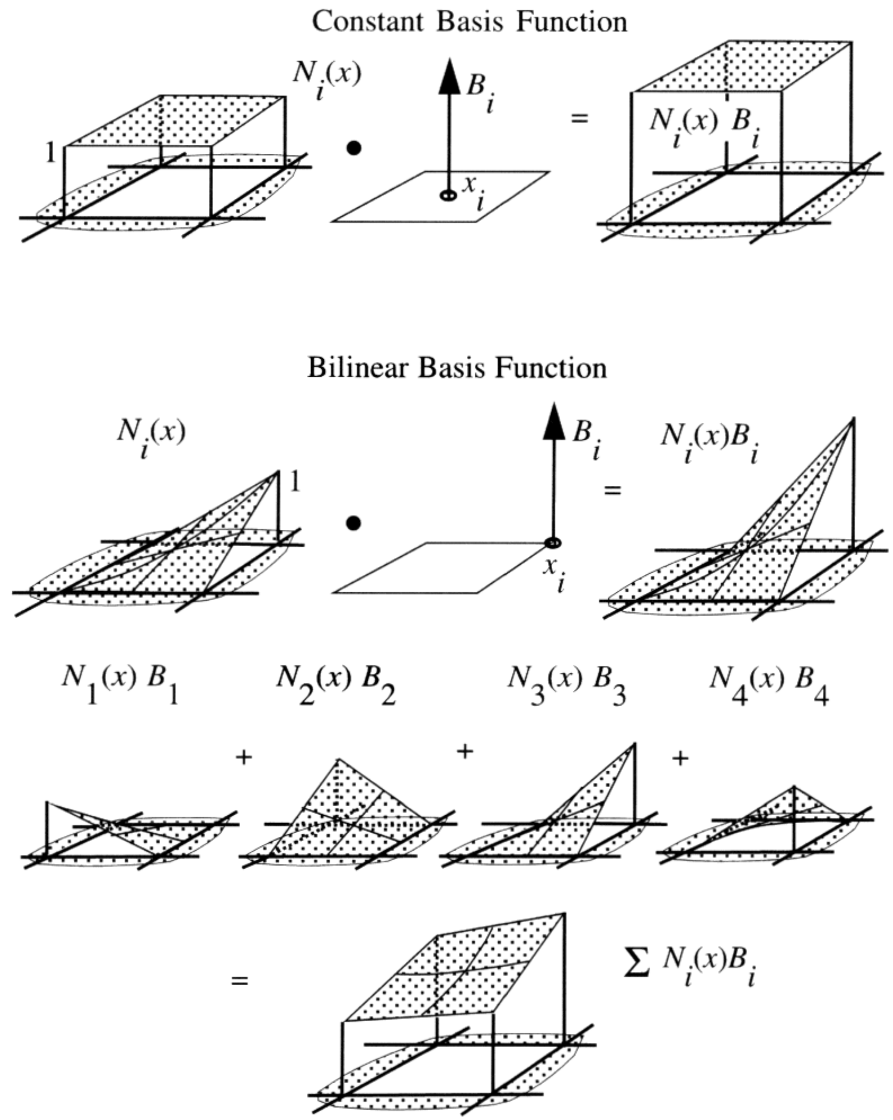
b) N_i linear:

$$N_i = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{für } x_{i-1} < x < x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{für } x_i < x < x_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\rightarrow B(x)$ bzw. B_i wird an den Eckpunkten der Dreiecke bestimmt



aus: Cohen/Wallace: Radiosity and Realistic Image Synthesis



aus: Cohen/Wallace: Radiosity and Realistic Image Synthesis

Wie kommt man zur besten Approximation von $B(x)$ durch $\tilde{B}(x)$?

Idee:

$\longrightarrow$ Fehler minimieren

$$\varepsilon(x) = B(x) - \tilde{B}(x) \qquad \begin{array}{ll} B(x): & \text{genau} \\ \tilde{B}(x): & \text{FEM-Approximation} \end{array}$$

Problem: $B(x)$ im allgemeinen Fall nicht bekannt

daher: $B(x)$ wird durch $\hat{B}(x)$ substituiert

$$\hat{B}(x) = E(x) + \rho(x) \int_S \hat{B}(x')\, G(x, x')\, dA'$$

relativer Fehler:

$$r(x) = \hat{B}(x) - E(x) - \rho(x) \int_S \hat{B}(x')\, G(x, x')\, dA'$$

$\Rightarrow$ wenn $\hat{B}(x) = B(x)$ dann ist $r(x) = 0$

→ r(x) kann im Allgemeinen nicht überall zu Null gemacht werden, aber an bestimmten Stellen (z.B. den Knoten)

→ dazu: Gewichtsfunktion $W_i(x)$ wählen und Norm $<>$ bestimmen:

$$|r(x)| = \sum_{i=1}^{n} | < r(x), W_i(x) > | \quad \text{(inneres Produkt)}$$

→ für alle n Gewichtsfunktionen $<>$ verschwinden lassen

→ n Gleichungen für n Unbekannte (n Knoten)

Punktkollokation

$\longrightarrow$ im einfachsten Fall sind die Gewichtsfunktionen Deltafunktionen

$$W_i(x) = \delta(x - x_i)$$

$\longrightarrow$ inneres Produkt Null, wenn die Funktion an den Knoten x_i Null

$$\hat{B}(x_i) - E(x_i) - \rho(x_i) \int_S \hat{B}(x')\, G(x_i, x')\, dA' = 0 \forall i$$

$\longrightarrow$ wird B nun durch die Basisfunktionen ausgedrückt gilt:

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^{n} B_j N_j(x_i) - E(x_i) - \rho(x_i) \int_S \sum_{j=1}^{n} B_j N_j(x')\, G(x_i, x')\, dA' \\
&= \left[\sum_{j=1}^{n} B_j \left[N_j(x_i) - \rho(x_i) \int_S N_j(x')\, G(x_i, x')\, dA' \right] \right] - E(x_i)
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$ vereinfacht ausgedrückt sind es n Gleichungen mit

$$\sum_{j=1}^{n} B_j K_{ij} - E(x_i) = 0 \quad \text{in Matrix-Schreibweise:} \quad \mathbf{K}\,\mathbf{B} = \mathbf{E}$$

mit

$$K_{ij} = N_j(x_i) - \rho(x_i) \int_S N_j(x')\, G(x_i, x')\, dA'$$

Galerkin-Methode

$\longrightarrow$ hier: Menge gewichteter Integrale über dem Residuum Null

$\longrightarrow$ Über jeder Fläche soll der Wert durchschnittlich Null sein

$\longrightarrow$ in diesem Fall ist der Gewichtsvektor

$$< r(x), W_i(x) > | = \int_S W_i(x) r(x) dA' = 0, \ \forall i$$

$\longrightarrow$ nun $r(x)$ einsetzen:

$$0 \ = \ \int_S W_i(x)\, r(x)\, dA$$

$$= \int_S W_i(x) \hat{B}(x)\, dA - \int_S W_i(x)\, E(x)\, dA -$$
$$\int_S W_i(x)\, \rho(x) \int_S \hat{B}(x')\, G(x, x')\, dA\, dA'$$

$\longrightarrow$ Galerkins Idee:

wähle als Gewichtungsfunktionen die Basisfunktionen:

$$W_i(x) = N_i(x)$$

$\longrightarrow$ Einsetzen und Umgruppieren:

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \sum_{j=1}^{n} B_j \left(\int_S N_i(x)\, N_j(x)\, dA - \right. \\
& \left. - \int_S N_i(x)\, \rho(x) \int_S N_j(x')\, G(x,x')\, dA\, dA' \right) - \\
& - \int_S E(x)\, N_i(x)\, dA
\end{aligned}
$$

Für konstante Basisfunktionen gilt:

$$
\int_S N_i(x)\, N_j(x)\, dA = \left\{ \begin{array}{ll} a_i & \text{falls i} = \text{j} \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} = \delta_{ij}\, A_i \;\; (\text{Fläche von } A_i)
$$

und damit:

$$\int_S E(x)\, N_i(x)\, dA = E_i\, A_i$$

ist außerdem $\rho(x)$ über A_i konstant (ρ_i), so gilt:

$$\int_S N_i(x)\, \rho(x) \int_S N_j(x')\, G(x,x')\, dA'\, dA = \rho_i \int_{A_i} \int_{A_j} G(x,x')\, dA_j\, dA_i$$

insgesamt:

$$\sum_{j=1}^{n} B_j \left(\delta_{ij}\, A_i - \rho_i \int_{A_i} \int_{A_j} G(x,x')\, dA_j\, dA_i \right) - E_i\, A_i = 0$$

durch A_i teilen:

$$\sum_{j=1}^{n} B_j \, (\delta_{ij} - \rho_i \underbrace{\frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} G(x, x') \, dA_j \, dA_i}_{\text{Formfaktor } F_{ij}}) - E_i = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} B_j \, (\delta_{ij} - \rho_i \, F_{ij}) - E_i = 0$$

oder in Matrizenschreibweise:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{B} = \mathbf{E} \quad \text{mit} \quad K_{ij} = \delta_{ij} - \rho_i \, F_{ij}$$

nach Umformungen:

$$B_i = E_i + \rho_i \sum_{j=1}^{n} B_j \, F_{ij}$$

$\longrightarrow$ linearisierte Form der Rendering-Gleichung

Noch zwei Fragen offen

1. Wie werden die Formfaktoren F_{ij} berechnet ?
2. Wie kann "$K\,B = E$" effizient gelöst werden ?