

Die Rendering-Gleichung

- Grundlage für globale Beleuchtungsmodelle■
- erlaubt einheitliche mathematische Beschreibung für Raytracing und Radiosity■
- Kajiya 1984: The rendering equation, SIGGRAPH'84■

- Inhalt des Kapitels:
 - Strahlungsgrößen und -zusammenhänge■
 - Reflektionsverhalten■
 - Herleitung der Rendering-Gleichung

Strahlungsgrößen und -zusammenhänge

Beleuchtete Szenen:

- Strahlungsgleichgewicht (Equilibrium) \Rightarrow Energieerhaltung
- Eingestrahelte Energie = Absorbierte/Abgestrahlte Energie
(Lichtquellen) (Oberflächen \rightarrow Wärme)

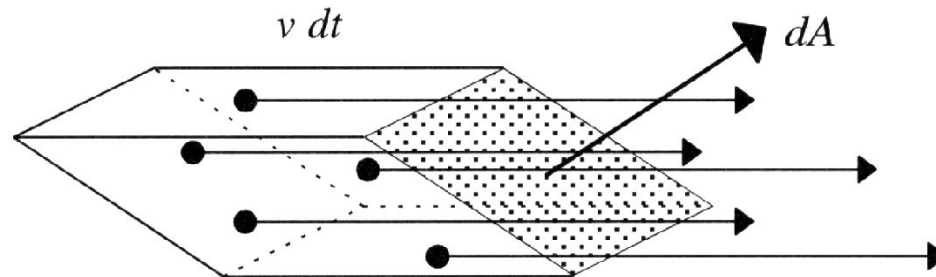
\rightarrow für jedes Volumenelement gilt:

Einfließende Energie = Ausfließende Energie

Das Partikelmodell

- Partikeldichte $p(x)$:
 - Anzahl der Partikel pro Volumeneinheit am Punkt x ■
- Gesamtanzahl der Partikel $P(x)$ in differentiellem Volumen dV

$$P(x) = p(x) dV \blacksquare$$



aus Cohen,Wallace, Radiosity and realistic image synthesis

→ Partikel fließen mit gleicher Geschwindigkeit in gleiche Richtung

→ in beliebig kleiner Zeiteinheit dt legt Partikel Distanz $\vec{v} dt$ zurück

$$s(t) = \vec{v}(t) dt \blacksquare$$

→ solange Fläche dA senkrecht zu $\vec{v}(t)$, fließen durch dA :

$$P(x) = p(x) s(t) dA \blacksquare$$

$$P(x) = p(x) \vec{v}(t) dt dA \blacksquare$$

→ allgemein gilt:

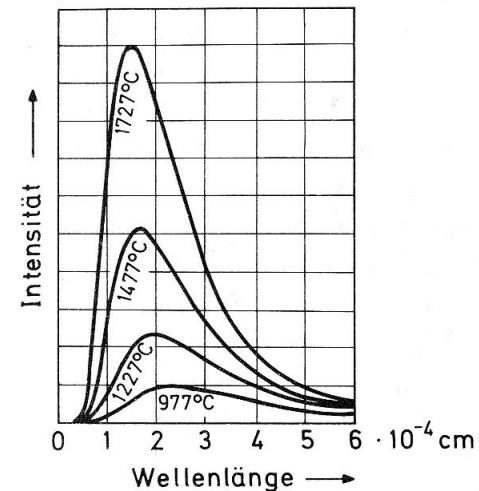
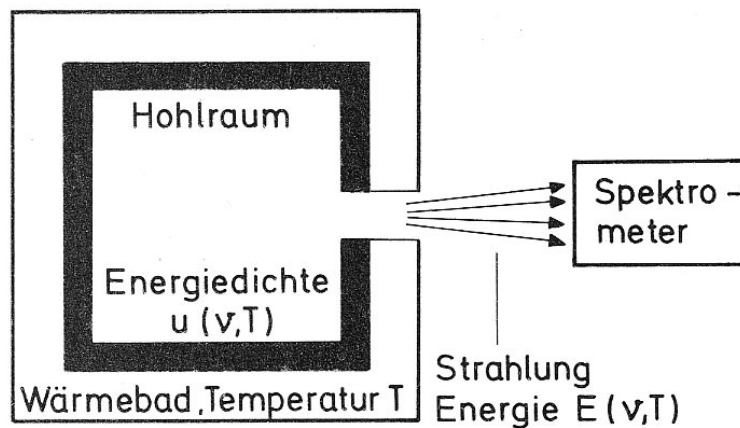
$$P(x) = p(x) (\vec{v} dt \cos \theta) dA \blacksquare$$

⇒ keine Partikel durchqueren die Fläche, wenn diese parallel zur Flußrichtung

Strahlungsenergie

→ spannendes Kapitel der Quantenphysik

→ Experiment: Hohlkörperstrahlung



aus Haken/Wolf: Atom- und Quantenphysik

- für feste Temperatur immer gleiche Energieverteilung
Form und Material sind egal
- Gesamtstrahlung einfache Funktion der Temperatur ν :

$$L = 2 \int_0^{\infty} P d\nu = \rho T^4$$

- Problem: Strahlungsflußdichte pro Wellenlänge (Energieverteilung)
- klassische Elektrodynamik

$$P = \frac{\nu^2}{c^2} kT$$

mit k Boltzmannkonstante und T Temperatur des Körpers

→ gilt fuer kleine Frequenzen, aber bei hohen Frequenzen gegen unendlich

→ Ultraviloett-Katatrophe

Planck ermittelt aus Experimenten:

$$P(\nu, T)d\nu = \frac{h\nu^3}{c^2(e^{h\nu/kT} - 1)}d\nu$$

→ wie kommen Formeln zusammen?

⇒ nicht kontinuierliche Energie, sondern quantisierte

→ es ergibt sich:

→ Energie durch Photonen:

$$E_p = n \cdot h \cdot \nu$$

$$E = P(x) \cdot E_p \blacksquare$$

E_p : Energie pro Photon

E : Strahlungsenergie pro Volumeneinheit

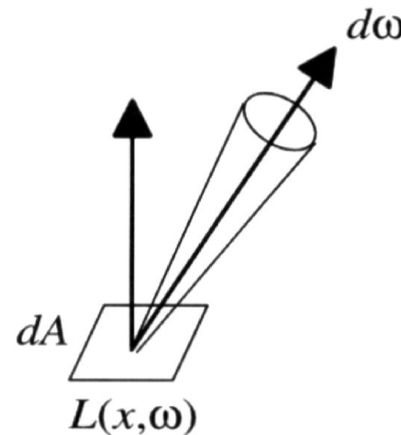
h : Plancksche Konstante, c : Lichtgeschwindigkeit, ν : Frequenz \blacksquare

Strahlungsfluß(-leistung):

$$\Phi = \frac{dE}{dt}$$

Strahldichte (radiance)

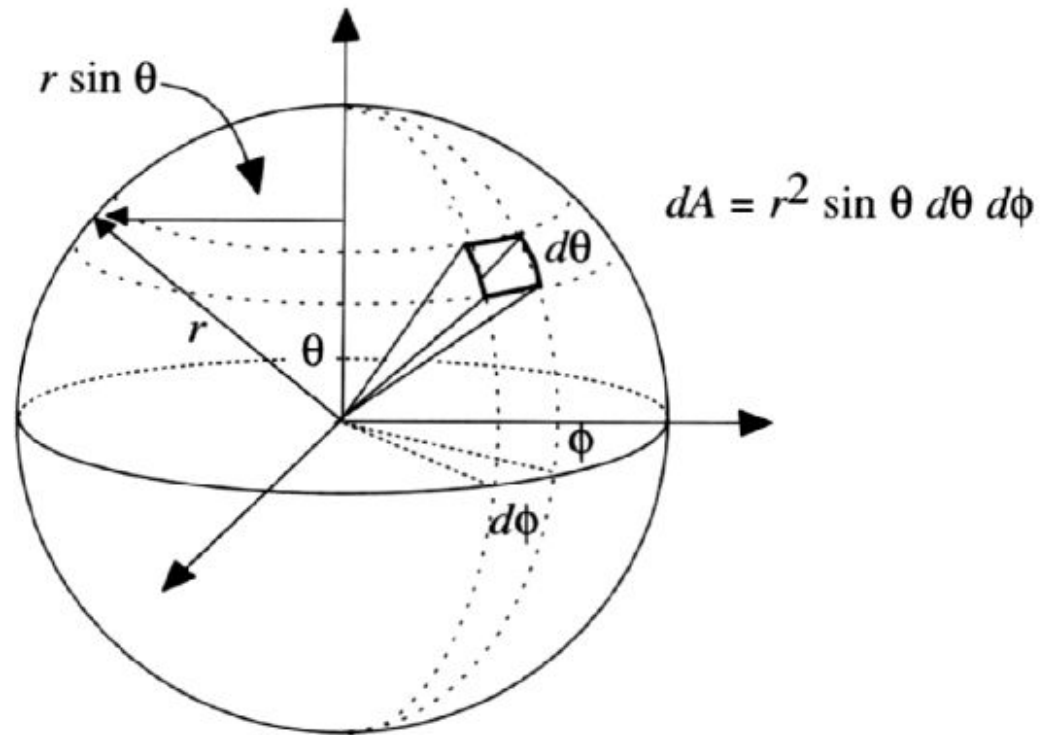
⇒ Leistung des Lichtstrahls auf senkrechte Fläche pro Raumwinkel in Richtung des Strahls■



$$L(x, \vec{\omega}) = \int p(x, \vec{\omega}, \lambda) \frac{h c}{\lambda} d\lambda \blacksquare$$

$p(x, \vec{\omega}, \lambda)$: Photonendichte mit Wellenlänge λ , am Ort x , Richtung $\vec{\omega}$
 $d\lambda$: über alle λ

Raumwinkel



aus Cohen,Wallace, Radiosity and realistic image synthesis

$$d\vec{\omega} = \frac{dA}{r^2} = \sin \theta d\theta d\phi$$

$$dA = (r d\theta) (r \sin \theta d\phi) = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

Eigenschaften des Strahlungsflusses

Differentieller Strahlungsfluß

Strahlungsfluß von Photonen auf Fläche dA über Raumwinkel $d\vec{\omega}$

$$d\Phi = L(x, \vec{\omega}) \cos \theta d\vec{\omega} dA$$

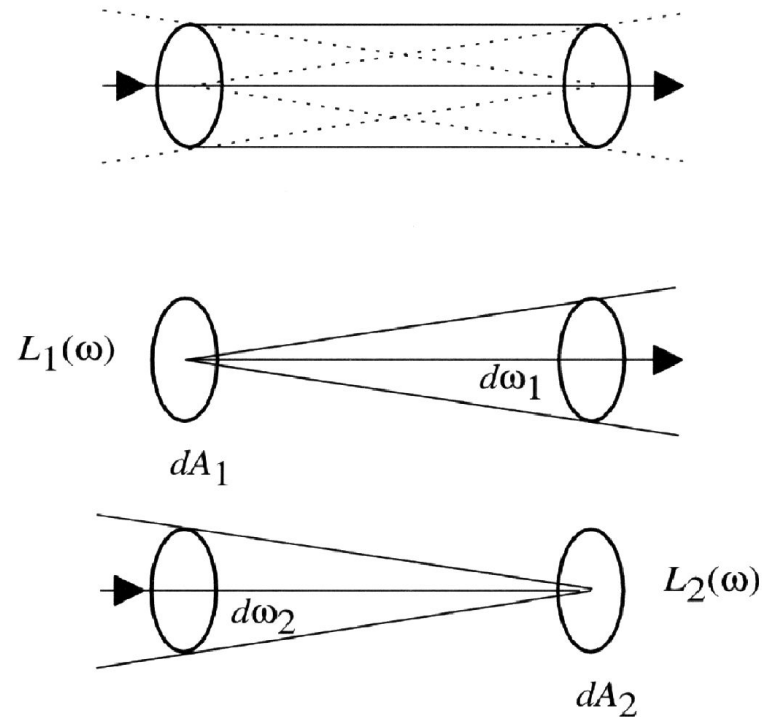
Bestrahlungsstärke (auf Fläche auftreffend):

$$E_i = \frac{d\Phi_i}{d\vec{\omega}}$$

Strahlungsstärke (von Fläche ausgehend):

$$E_o = \frac{d\Phi_o}{d\vec{\omega}}$$

1.) Strahlungsfluß im Strahl



aus Cohen,Wallace, Radiosity and realistic image synthesis

- Strahlungsfluß entlang eines Strahls bleibt konstant■
- ⇒ Strahlungsfluß, der erste Fläche verläßt, ist gleich dem Strahlungsfluß, der zweite Fläche erreicht

das heißt:

$$L_1 d\vec{\omega}_1 dA_1 = L_2 d\vec{\omega}_2 dA_2 \blacksquare$$

$$d\vec{\omega}_1 = \frac{dA_2}{r^2} \quad d\vec{\omega}_2 = \frac{dA_1}{r^2} \blacksquare$$

$$T = d\vec{\omega}_1 dA_1 = d\vec{\omega}_2 dA_2 = \frac{dA_1 dA_2}{r^2} \quad (\text{Durchsatz}) \blacksquare$$

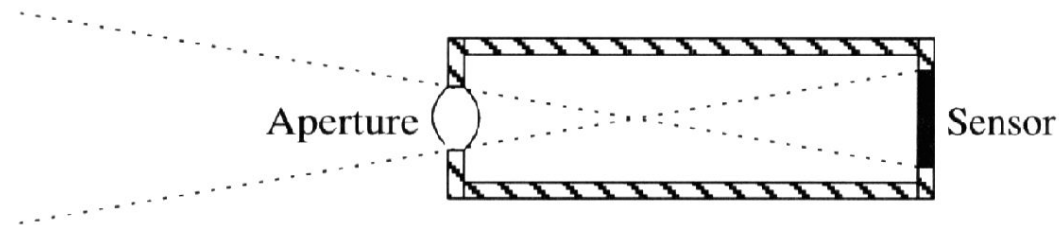
⇒ Flächenelemente von A_1 strahlen nur auf A_2 \blacksquare

⇒ $L_1 = L_2$ \blacksquare

⇒ Strahldichte wird mit einem Strahl (z.B. Raytracer) assoziiert \blacksquare

2.) Sensorantwort

die Sensorantwort (Strahlungsleistung) ist proportional zur Strahlung, die vom Sensor gesehen wird (nachweisbar mit Hilfe eines Belichtungsmessers)



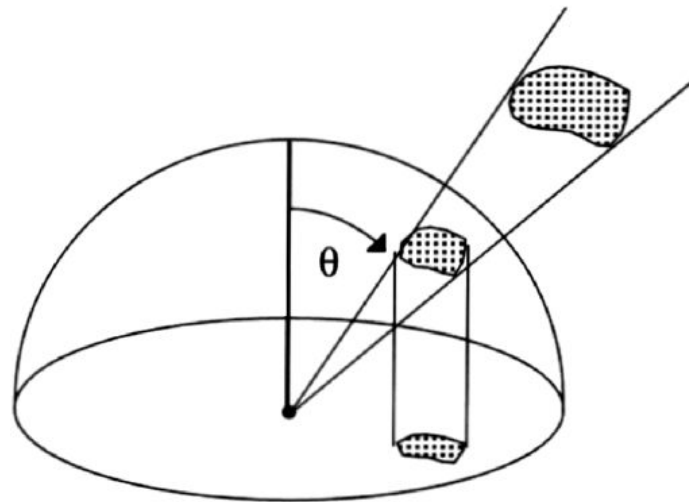
$$R = \int_A \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\Phi \quad A: \text{Öffnungsfläche}$$

$$R = \int_A \int_{\omega_1}^{\omega_2} L(x, \vec{\omega}) \cos \theta d\vec{\omega} dA = LT$$

Energiedichte

→ was wird insgesamt auf eine Flächenstück mit gegebener Orientierung abgestrahlt■

⇒ Integration über Hemisphere mit Berücksichtigung des Winkels■



aus Cohen,Wallace, Radiosity and realistic image synthesis

hierbei ist $\cos\theta d\vec{\omega}$ der projizierte Raumwinkel

auftreffende Bestrahlungsstärke auf Fläche:

Irradiance:
$$E_i = \int_{\omega_1}^{\omega_2} L_i(\vec{\omega}) \cos \theta d\vec{\omega}$$

abgegebene Strahlungsstärke von Fläche:

Radiosity:
$$E_o = \int_{\omega_1}^{\omega_2} L_o(\vec{\omega}) \cos \theta d\vec{\omega}$$

Sonderfälle:

- Lichtfeld mit parallelen Strahlen (z.B. Laser): $E_i = E_o \cos \theta$
- Punktlichtquellen (Strahlung verteilt sich über gesamte Sphäre)

$$I = \frac{\Phi}{4\pi} \quad E_i = \frac{\Phi \cos \theta}{4\pi |x - x_s|^2}$$

Radio- und Photometrische Größen

Radiometrische Bezeichnung

Strahlungsenergie E

Strahlungsleistung Φ (Fluß)

Strahldichte L (Radiance)

Strahlungsstärke E_o (Irradiance)

Bestrahlungsstärke E_i (Radiosity)

Strahlungsintensität

Einheiten

joules [$J = kg\ m^2/s^2$]

Watt [$W = joules/s$]

[$W/m^2\ sr$]

[W/m^2]

[W/m^2]

[W/sr]

Photometrische Bezeichnung

Lichtmenge Q

Lichtstrom Φ (luminous flux)

Lichtstärke I (luminous intensity)

Spezifische Lichtausstrahlung M (luminosity)

Beleuchtungsstärke E (illuminance)

Leuchtdichte L (luminance)

Einheiten

Lumensek(lm)

Lumen

Candela

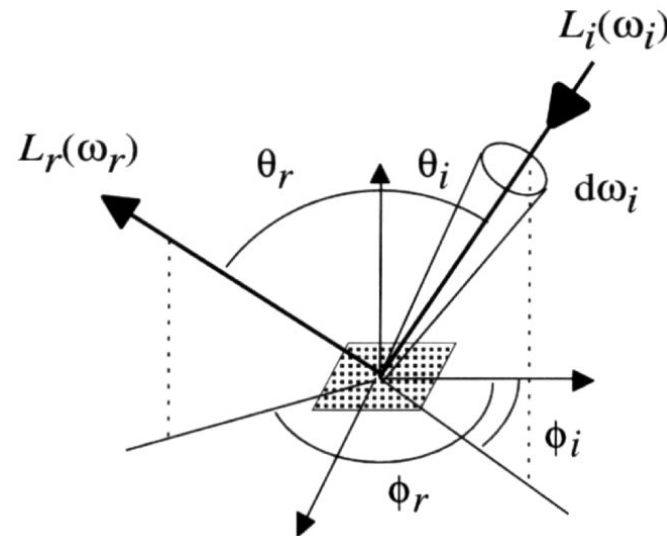
Phot

Lux

Candela/m²

Reflektionsverhalten von Körpern

⇒ wird durch **BRDF** (Bidirektionale Reflektionsverteilungsfunktion) spezifiziert



aus Cohen,Wallace, Radiosity and realistic image synthesis

es gilt: $dL_r(\vec{\omega}_r) \approx dE_i(\vec{\omega}_i)$ ■

⇒ Reflektion hängt ab von Winkel **und** Energiedichte

BRDF

Proportionalitätsfunktion (BRDF):

$$f_r(\vec{\omega}_i \rightarrow \vec{\omega}_r) = \frac{L_r(\vec{\omega}_r)}{L_i(\vec{\omega}_i) \cos \theta_i d\omega_i}$$

L_r : reflektierte Strahlendichte■

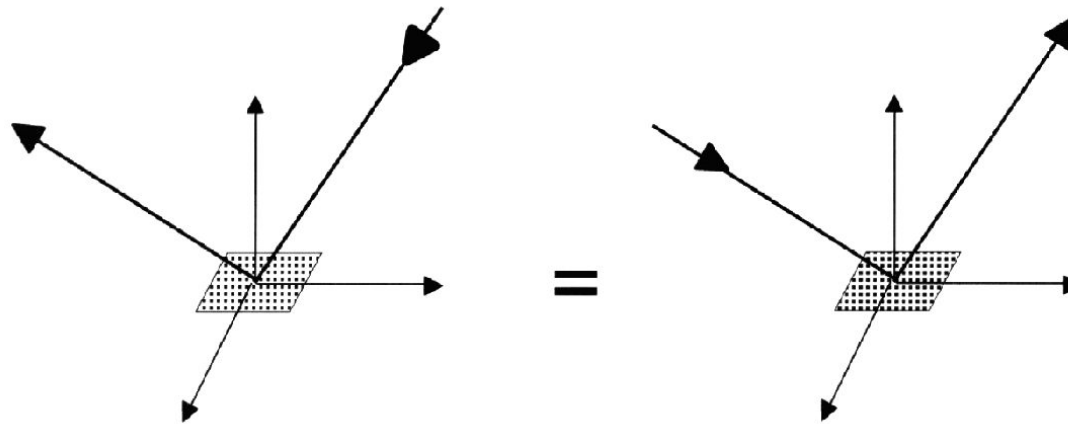
L_i : auftreffende Strahlendichte■

→ hier ist der Auftreffwinkel θ_i mit drin!■

→ d.h. es wird das auf die Fläche treffende Licht gemessen

Eigenschaften der BRDF

- 1.) BRDF bleibt unverändert, wenn einfallende und ausfallende Strahlung wechseln (**Helmholtz-Prinzip**)

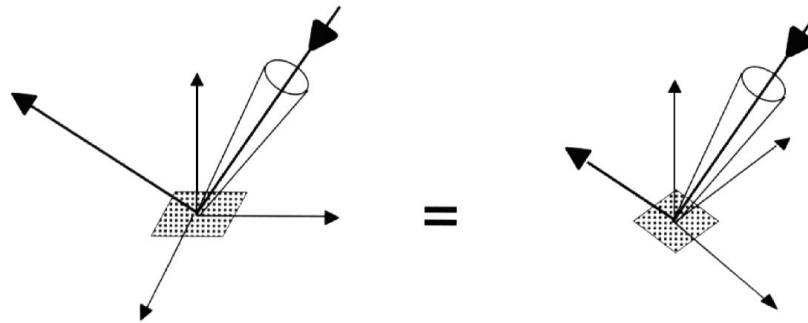


aus Cohen,Wallace, Radiosity and realistic image synthesis

$$f_r(\vec{\omega}_r \rightarrow \vec{\omega}_i) = f_r(\vec{\omega}_i \rightarrow \vec{\omega}_r)$$

2.) BRDF ist im allgemeinen Fall anisotrop

⇒ oft jedoch isotrop:



aus Cohen,Wallace, Radiosity and realistic image synthesis

$$f_r((\theta_i, \phi_i + \phi) \rightarrow (\theta_r, \phi_r + \phi)) = f_r((\theta_i, \phi_i) \rightarrow (\theta_r, \phi_r))$$

→ Reflektionsfunktion f_r bleibt gleich, wenn Fläche in ihrer Ebene gedreht wird

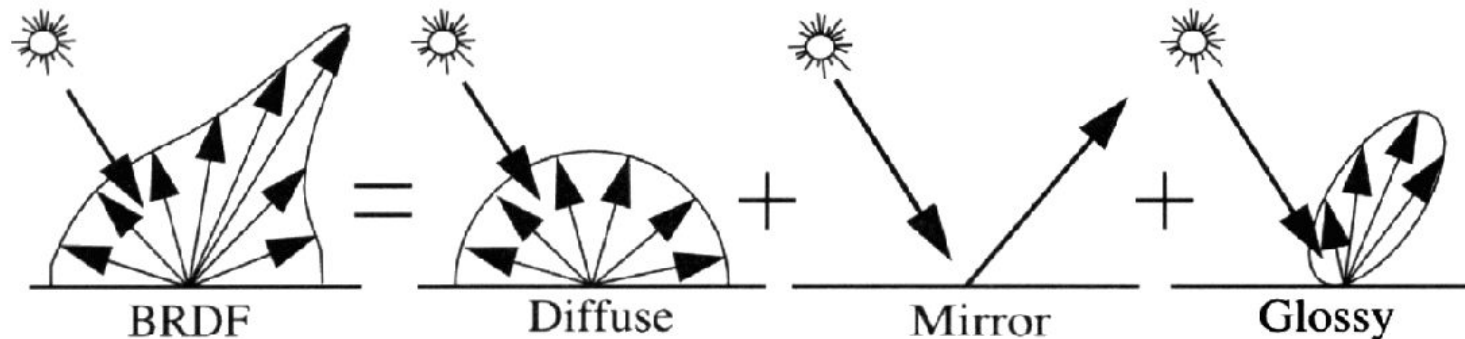
Reflektions-Gleichung

- wird Licht aus einer neuen Richtung zugefügt, hat das keinen Einfluß auf das von anderen Raumrichtungen reflektierte Licht■
- ⇒ Reflektion hat lineare Charakteristik■
- ⇒ gesamtes reflektiertes Licht als Integral:

$$L_r(\vec{\omega}_r) = \int_{\Omega_i} f_r(\vec{\omega}_i, \vec{\omega}_r) L_i(\vec{\omega}_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

Anteile der BRDF

→ BRDF setzt sich aus drei Anteilen zusammen



aus Cohen,Wallace, Radiosity and realistic image synthesis

$BRDF \approx \text{spiegelnde} + \text{diffuse} + \text{glänzende Reflektion}$

→ ähnlich Phong-Modell

→ Bestimmung der Anteile: Messen

Spiegelnde Reflektion

⇒ Reflektionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel

$$\begin{aligned}\theta_r &= \theta_i & L_r(\theta_r, \phi_r) &= L_i(\theta_r, \phi_r \pm \pi) \\ \phi_r &= \phi_i \pm \pi\end{aligned}$$

$$f_{r,m}(\vec{\omega}_i, \vec{\omega}_r) = \frac{\delta(\cos \theta_i - \cos \theta_r)}{\cos \theta_i} \delta(\phi_i - (\phi_r \pm \pi))$$

$$\begin{aligned}L_r(\theta_r, \phi_r) &= \int_{\Omega_i} \frac{\delta(\cos \theta_i - \cos \theta_r)}{\cos \theta_i} \delta(\phi_i - (\phi_r \pm \pi)) \cdot L_i(\theta_i, \phi_i) \cos \theta_i d\theta_i d\phi_i \\ &= L_i(\theta_r, \phi_r \pm \pi)\end{aligned}$$

Diffuse Reflektion

⇒ BRDF konstant über Hemisphäre Ω_i

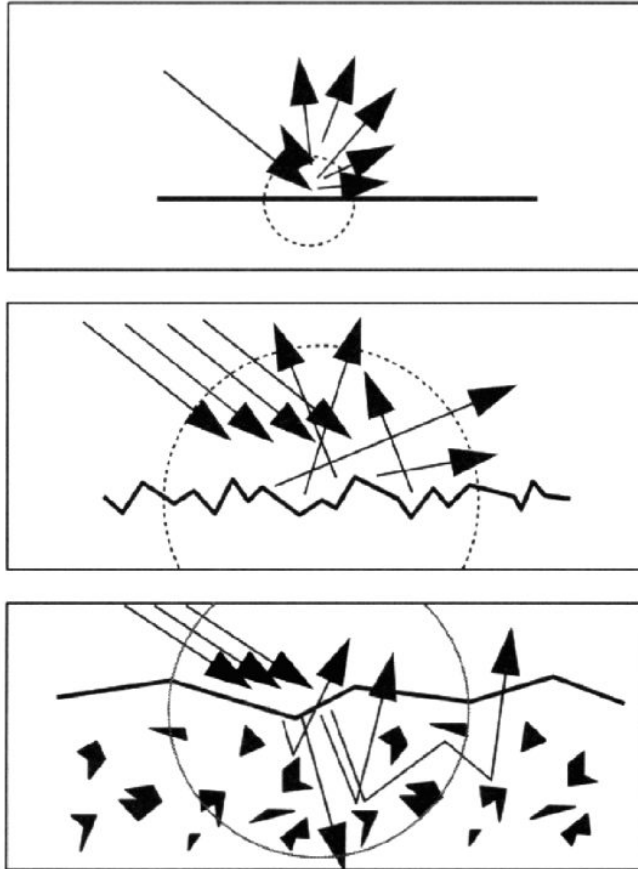
$$\begin{aligned}
 L_{r,d}(\vec{\omega}_r) &= \int_{\Omega_i} f_{r,d} L_i(\vec{\omega}_i) \cos \theta_i d\omega_i \\
 &= f_{r,d} \underbrace{\int_{\Omega_i} L_i(\vec{\omega}_i) \cos \theta_i d\omega_i}_E
 \end{aligned}$$

$$B = f_{r,d} E \quad \begin{array}{l} B : \text{reflektierte Strahlung} \\ E : \text{einfallende Strahlung} \end{array}$$

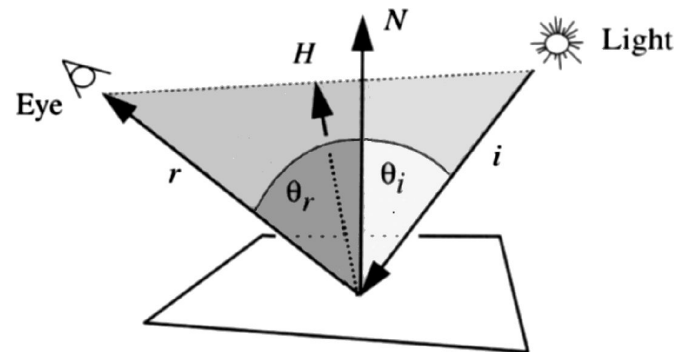
$$f_{r,d} = \frac{\rho}{\pi} = \frac{B}{E} \quad \rho : \text{Reflektionskoeffizient } (\rho \in [0, 1])$$

Glänzende Reflektion

→ entsteht durch die Kombination verschiedener Effekte

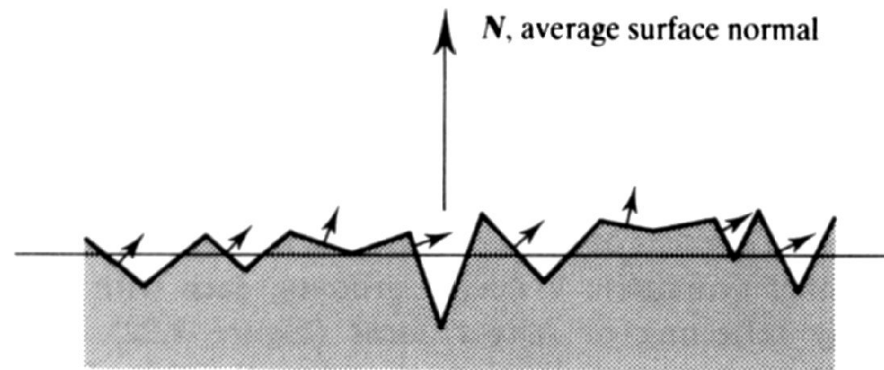


aus Cohen,Wallace, Radiosity and realistic image synthesis



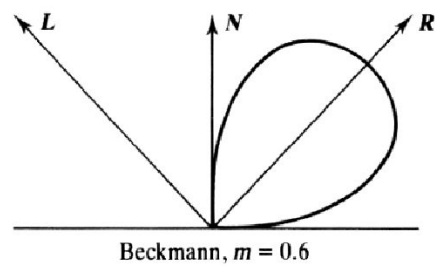
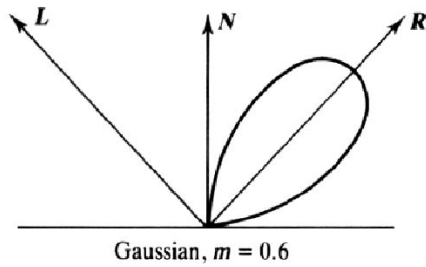
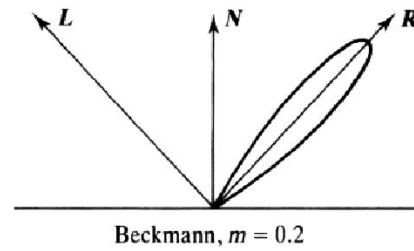
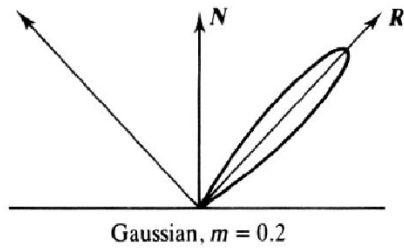
aus Cohen,Wallace, Radiosity and realistic image synthesis

Torrance-Sparrow-Modell:

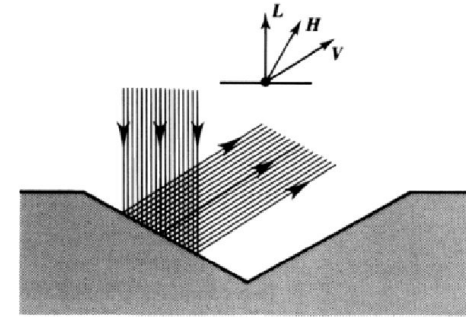
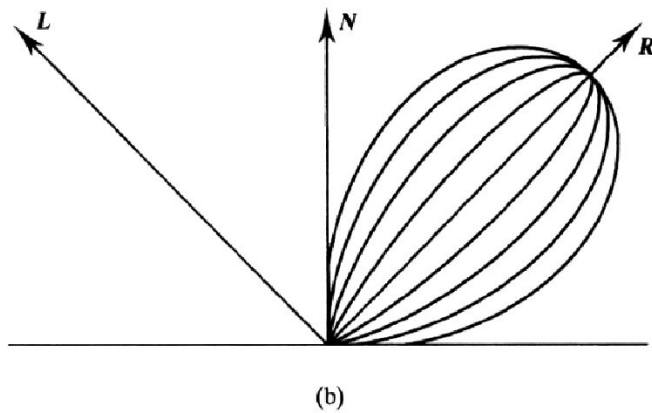


aus Cohen,Wallace, Radiosity and realistic image synthesis

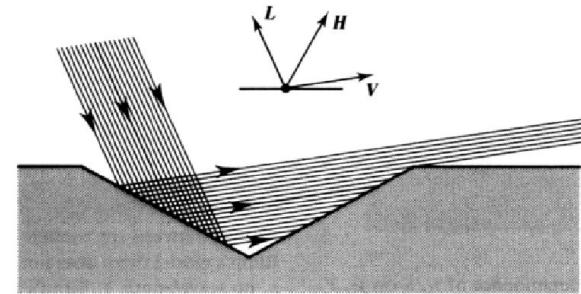
⇒ Oberfläche wird als isotropische Aneinanderreihung von Mikrofacetten (perfekt spiegelnde Reflektoren) betrachtet



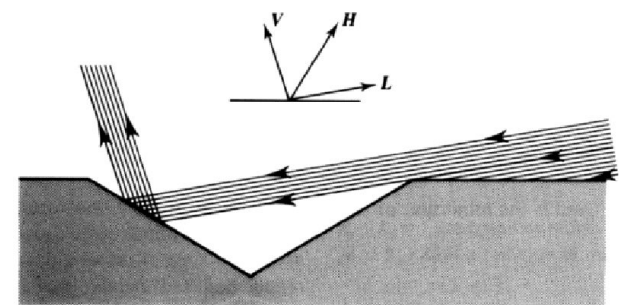
(a)



Case 1. No interference : angle between L and V is small – all light falling on the microfacet escapes.



Case 2. Some reflected light is trapped – 'masking'.



Case 3. Some incident light is 'shadowed' (inverse of case 2).

aus Watt, Watt, Advanced animation and rendering techniques

$$f_{r,g} = \frac{D G F}{4 \cos \theta_r \cos \theta_i}$$

D: Verteilung der Mikrofacetten (Funktion, liefert Anzahl der pro Raumrichtung orientierten Mikrofacetten)

G: Stärke der Selbst-Schattierung von Mikrofacetten

F: Fresnel-Term (aus Brechungsindex)

Die Rendering-Gleichung

- zur Erinnerung die Reflektionsgleichung:

$$L_r(\vec{\omega}_r) = \int_{\Omega_i} f_r(\vec{\omega}_i, \vec{\omega}_r) L_i(\vec{\omega}_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

- Punktlichtquelle in x_s :

$$E = \frac{\Phi \cos \theta_i}{4\pi |x - x_s|^2}$$

Φ : Strahlungsstärke der Lichtquelle

θ_i : Winkel zur Fläche

$4\pi |x - x_s|^2$: räumliche Abnahme

($|x - x_s|$: Abstand zwischen Lichtquelle und Fläche)

→ Beleuchtung eines Ortes (Lichtquelle in Richtung $\vec{\omega}_s$):

$$L_i(\vec{\omega}_i) = \frac{\Phi}{4\pi |x - x_s|^2} \delta(\cos \theta_i - \cos \theta_s) \delta(\phi_i - \phi_s) \blacksquare$$

→ einsetzen in Relektionsgleichung ergibt reflektiertes Licht:

$$L_r(\vec{\omega}_r) = \frac{\Phi}{4\pi |x - x_s|^2} f_r(\vec{\omega}_s, \vec{\omega}_r) \cos \theta_s \blacksquare$$

→ bei n Punktlichtquellen (OpenGL):

$$L_r(\vec{\omega}_r) = \sum_i^n \frac{\Phi_i}{4\pi |x - x_{s_i}|^2} \delta(\cos \theta_r - \cos \theta_{s_i}) \delta(\phi_r - \phi_{s_i}) \blacksquare$$

→ werden flächige Lichtquellen verwendet, muß integriert werden

Globales Beleuchtungsmodell

Beleuchtung des Ortes x' von x aus

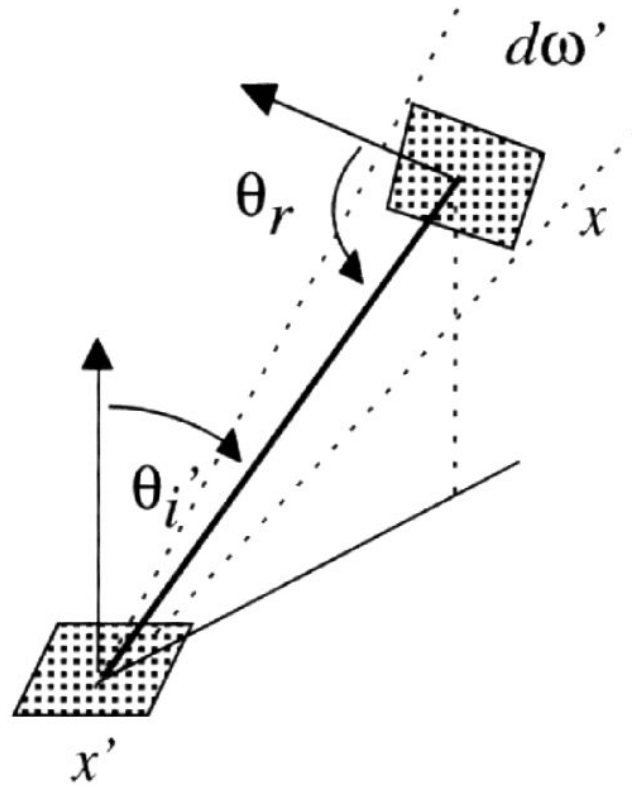
$$L_i(x', \vec{\omega}'_i) = L_o(x, \vec{\omega}_o) V(x, x') \blacksquare$$

wobei $\vec{\omega}'_i$ Richtungsvektor von x' nach x ist

$$\vec{\omega}'_i = -\vec{\omega}_o = \frac{x - x'}{|x - x'|} \blacksquare$$

und V Visibilitätsterm: $V(x, x') = \begin{cases} 1 & x' \text{ sieht } x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Geometrische Verhältnisse bei zwei Flächen



aus Cohen,Wallace, Radiosity and realistic image synthesis

→ nun Umwandlung des Raumintegrals in Integral über alle Flächen

$$\int_{\Omega_i} \rightarrow \int_S \text{ (Integral über alle Flächen der Menge } S) \blacksquare$$

→ $d\omega'_i$ wird dazu mit Hilfe der Fläche dA ausgedrückt:

$$d\omega'_i = \frac{\cos \theta_o dA}{|x - x'|^2} \quad \text{bzw.} \quad d\omega'_i \cos \theta_i = G(x, x') dA \blacksquare$$

mit

$$G(x, x') = G(x', x) = \frac{\cos \theta'_i \cos \theta_o}{|x - x'|^2}$$

→ die Reflektionsgleichung

$$L_r(\vec{\omega}_r) = \int_{\Omega_i} f_r(\vec{\omega}_i, \vec{\omega}_r) L_i(\vec{\omega}_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

kann jetzt durch Einbauen von $G(x, x')$ umgeschrieben werden in

$$L_r(x', \vec{\omega}'_r) = \int_S f_r(\vec{\omega}'_i, \vec{\omega}'_r) L(x, \vec{\omega}'_i) G(x, x') V(x, x') dA \blacksquare$$

→ da nur abgehende Strahlung gemessen wird, fallen Subscripte weg

$$L_r(x', \vec{\omega}') = \int_S f_r(x) L(x, \vec{\omega}) G(x, x') V(x, x') dA \blacksquare$$

⇒ Rendering-Gleichung (Kajiya, SIGGRAPH 86):

→ Die vollständige Rendering-Gleichung berücksichtigt zusätzlich das Eigenleuchten der Fläche (falls Lichtquelle)

$$L(x', \vec{\omega}') = L_e(x', \vec{\omega}') + \int_S f_r(x) L(x, \vec{\omega}) G(x, x') V(x, x') dA$$

wobei:

$L(x', \vec{\omega}')$:	abgehende Strahlung von Stelle x' in Richtung $\vec{\omega}'$
$L_e(x', \vec{\omega}')$:	Eigenleuchten der Fläche an der Stelle x'
$f_r(x)$:	BRDF von Stelle x , gemessen für Stelle x'
$L(x, \vec{\omega})$:	abgehende Strahlung von Ort x
$G(x, x')$:	Geometrieterm zwischen Flächen für x und x'
$V(x, x')$:	Sichtbarkeit von x aus Position x'

Die Radiosity-Gleichung

→ nur diffus (lambertsch) reflektierende Flächen■

⇒ abgehende Strahlung nicht richtungsabhängig:

$$\int_S f_r(x) \dots dA = \frac{\rho(x)}{\pi} \int_S \dots dA \blacksquare$$

somit

$$B(x) = E(x) + \rho(x) \int_S B(x') \frac{G(x, x') V(x, x')}{\pi} dA'$$

$B(x), B(x')$: abgehende Strahlung an Orten x, x'

$E(x)$: Eigenleuchten

$\rho(x)$: Reflektionskoeffizient

→ Problem: $B(x)$ kommt links vor und rechts unter dem Integral

$$B(x) = E(x) + \rho(x) \int_S B(x') \frac{G(x, x') V(x, x')}{\pi} dA' \blacksquare$$

⇒ Integralgleichung

⇒ schwer zu lösen, meist nur numerisch approximativ \blacksquare

effiziente Lösungsverfahren:

- Finite-Elemente-Lösung (Basis für Radiosity-Verfahren) \blacksquare
- Monte Carlo Integration (Basis für Raytracing)

Finite-Elemente-Lösung

- Approximation von $L(x)$ bzw. $B(x)$ für alle Flächen■
- blickrichtungsunabhängig■
- danach: Bild wird über konventionelle Verfahren (OpenGL, Raytracing) dargestellt■
- Emission in alle Richtungen gleich (Anwendung Radiosity-Gleichung)

Monte-Carlo Integration

- Rendering-Gleichung wird für eine Betrachtungsrichtung gelöst
- Integralbildung durch punktweise Abtastung
- blickrichtungsabhängig

- klassisches Raytracing: Spezialfall für Punktlichtquellen sowie ausschließlich diffus oder spiegelnde Oberflächen