

Graphische Datenverarbeitung (Hauptseminar)

A Vortex Particle Method for Smoke, Fire and Explosions

(Ein Wirbelpartikel Ansatz für Rauch, Feuer und Explosionen)

Martin Petrasch
mp024138@inf.tu-dresden.de
2807550

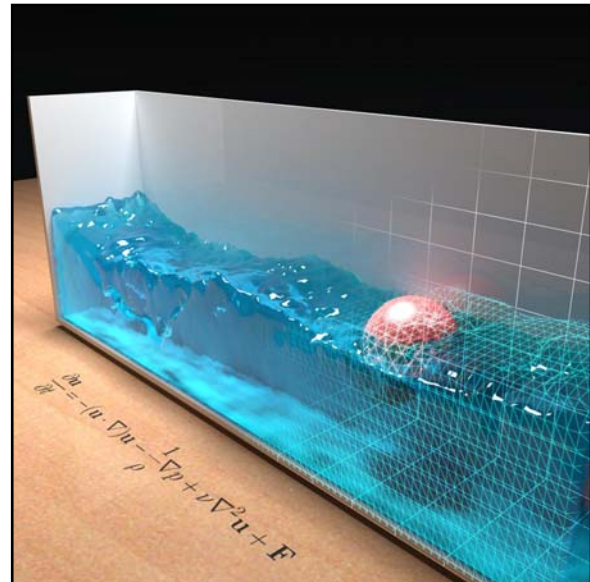
Inhaltsverzeichnis

1. Überblick	3
2. Einführung	4
3. Bisheriger Ansatz	4
4. „Euler - Gitter“ basierte Methode	5
5. Semi – Lagrange Methode	6
6. Vorticity Confinement	7
7. Erweiterungen	8
8. Beispiele	12
9. Zusammenfassung	14
10. Ausblick	14
11. Literaturverzeichnis	15

1. Überblick

Um auf das Thema der Wirbelpartikelmethode besser eingehen zu können, möchte ich hier einen kurzen Überblick über das allgemeine Thema Gas- und Flüssigkeitssimulationen und die Anwendung in der Computergraphik geben.

Gas- und Flüssigkeitssimulationen sind der Versuch, die komplexen Abläufe innerhalb von Gasen und Flüssigkeiten unter verschiedenen Aspekten durch Berechnung zu simulieren. Benötigt wird dies z.B. in der Wettervorhersage oder zur Erforschung von Verbrennungsverhalten (Motoren-/Triebwerksforschung). Die Problematik bei diesen Simulationen besteht hauptsächlich darin, eine möglichst genaue Berechnung in möglichst kurzer Zeit zu erhalten. Um diese gegensätzlichen Ziele zu erreichen, nutzt man die verschiedenen Aspekte der einzelnen Simulationen aus. So werden spezielle Ansätze für die individuellen Anwendungsgebiete genutzt.



In der Computergraphik geht es allerdings weniger um eine möglichst genaue Simulation, als viel mehr um eine schnelle Berechnung und eine hohe „Glaubhaftigkeit“ der Simulation. Genutzt wird die Visualisierung von Gas- und Flüssigkeitssimulationen, abgesehen von der Nutzung in der Forschung selbst, in der Special Effects Industrie, also in der Filmindustrie. In naher Zukunft wird dies mit hoher Wahrscheinlichkeit auch für Echtzeitanwendungen, wie Computerspiele, interessant, weil möglich, werden. Durch die Optimierung hinsichtlich der Geschwindigkeit bleiben gewisse Effekte einer genaueren Simulation aus. Dazu gehören hochturbulente Phänomene, wie schnelle und kleine Verwirblungen. Beispiele sind dabei Rauch, Feuer und Explosionen. Da sich das Filmen dieser Effekte gerade bei komplexen Kamerabewegungen als sehr schwierig darstellt, wird immer öfter auf die Computersimulation zurückgegriffen.

Bisher stellte die Berechnung dieser Phänomene unter dem Aspekt, möglichst schnell eine stabile Lösung zu erhalten, eine große Herausforderung dar. Hier wird ein Ansatz vorgestellt, der zu dem herkömmlichen Gitteransatz zusätzlich so genannte Wirbelpartikel einführt, um eben jene hochturbulenten Erscheinungen besser errechnen und darstellen zu können.



2. Einführung

Grundlage einer Computersimulation, wie hier der Gas- und Flüssigkeitssimulation, ist das mathematische Modell eines realen Systems. Dieses besteht aus Variablen, Gleichungen und logischen Regeln. Um Gase und Flüssigkeiten nicht ständig unterscheiden zu müssen, wird der Sammelbegriff des Fluids eingeführt. Fluide sind Substanzen, die in Ruhelagen Scherkräften nicht widerstehen können. Dabei muss weiterhin nach kompressiblen und inkompressiblen Fluiden unterschieden werden. Gase zählen zu den kompressiblen Fluiden. Während Flüssigkeiten, wie Wasser, zu den inkompressiblen Fluiden gehören. Ein Fluid, das seine Dichte bei Druck von außen nicht ändert, wird inkompressibel genannt. Inkompressible Fluide existieren in der Natur nicht, aber für die meisten Berechnungen, wie zum Beispiel für Wasser in Wasserleitungen unter Normalbedingungen, kann man von einem inkompressiblen Fluid ausgehen. Dies vereinfacht die Rechnung häufig enorm und der Fehler dabei ist vernachlässigbar klein.

3. Bisheriger Ansatz

Für die Beschreibung des Verhaltens von Strömungen in Fluiden nutzt man die Navier-Stokes-Gleichungen. Sie sind ein System von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen. Wir setzen voraus, dass die Dichte in unserer Simulation immer konstant ist. Durch diese Vereinfachung erhalten wir die so genannte inkompressible Navier-Stokes-Gleichung

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \mathbf{f} - \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Wobei \mathbf{u} die Geschwindigkeit ist. \mathbf{f} beschreibt die externen Kräfte, die auf das Fluid einwirken. ν ist die kinematische Viskosität des Fluids. p der Druck, allerdings nicht der physikalische Druck, sondern ein durch die Dichte geteilter. ∇ ist der Gradient, also die räumliche erste partielle Ableitung, genauer $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$. Δ steht für den Laplace-Operator und ist Abkürzung für $\nabla \cdot \nabla$.

Da wir eine schnelle Lösung anstreben, lösen wir dies mit Hilfe der Finiten-Differenzen-Methode. Dies ist das einfachste numerische Verfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen. Dabei wird das Gebiet, für das die Gleichung gelten soll, zunächst in eine endliche (finite) Zahl von Gitterpunkten zerlegt. Dies geschieht durch ein Gitter von senkrecht aufeinander stehenden Linien, die dadurch

entstehenden Gitterpunkte entsprechen dann den Kreuzungspunkten (siehe Abbildung 4). Die Ableitungen an den Gitterpunkten werden dann durch Differenzen approximiert. Die partiellen Differentialgleichungen werden so in ein System von Differenzengleichungen umformuliert. Gelöst werden diese durch die Direkte Numerische Simulation. Dabei gibt es explizite und implizite numerische Lösungsverfahren. Bei den expliziten Verfahren muss der Zeitschritt im Verhältnis zum verwendeten räumlichen Gitter stehen, damit die Berechnung stabil bleibt. Bei den impliziten Verfahren wird der Zeitschritt variabel an die momentanen, lokalen Strömungsgegebenheiten angepasst. Der Einfachheit halber nutzen wir das explizite Lösungsverfahren.

4. „Euler – Gitter“ basierte Methode

Als Grundlage für die hier vorgestellte Methode gilt die eben genannte Raumdiskretisierung durch Voxelgitter. Dabei wird der Raum gleichmäßig durch äquidistante Gitter geteilt. Die zwischen den Gitterpunkten liegenden Räume nennen wir Voxel. In den einzelnen Gitterpunkten werden Daten wie Druck, (Strömungs-) Geschwindigkeit, Temperatur etc. gespeichert. Je nach dem, was genau man in dem Voxelgitter simulieren möchte.

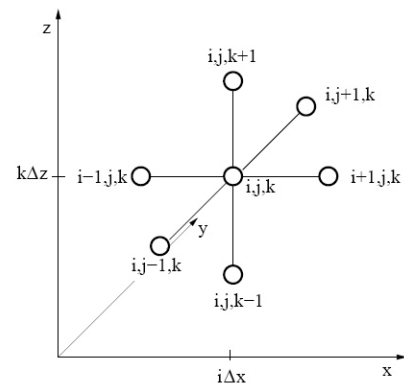


Abbildung 4: Raumenterteilung

Um an den Gitterpunkten die Werte von Druck und Geschwindigkeit zu bestimmen, löst man die Differenzengleichungen mit Hilfe der Euler-Methode. Dabei nutzt man zwei Gitter, das Quell- und das Zielgitter, welche nach der Berechnung vertauscht werden. Das implizite Euler-Verfahren nach Leonhard Euler ist sicher das einfachste implizite Verfahren zur numerischen Lösung eines Anfangswert-Problems. Dabei wählt man eine Diskretisierungs-Schrittweite $h > 0$, betrachte die diskreten Zeitpunkte und berechne die iterierten Werte. Der Zeitschritt bestimmt dabei also die Genauigkeit des Systems.

Die Problematik dieser Methode ist, dass, falls das Gitter zu niedrig aufgelöst ist, bzw. die Zeitschritte zu groß gewählt wurden, die Simulation zu ungenau wird. Liegen beispielsweise Objekte im Gitter, so können die entstehenden Wirbel nicht genügend aufgelöst werden, da das Gitter zu grob ist.

5. Semi - Lagrange Methode

Eine andere Methode stellt die Semi-Lagrange-Methode dar. Wir betrachten dabei die Mittelpunkte unserer Voxel als Partikel, welches durch das Vektorfeld bewegt wird. Zur Umsetzung werden wieder zwei Gitter verwendet. Verfolgt man das Partikel nun vorwärts in der Zeit, wird es nicht unbedingt in einem Zellmittelpunkt enden (siehe Abbildung 5.1 B). Für die weitere Berechnung wird aber der zu berechnende Wert in den Voxelmittelpunkten benötigt. Eine Bestimmung des Wertes ist auf diese Weise also nicht möglich. Besser ist es, genau die Partikel im Quellgitter zu finden, die genau in einem Voxelmittelpunkt nach dem Berechnungsschritt enden. Diese kann man finden, indem man rückwärts in der Zeit „geht“. Man betrachtet ein Partikel im Zellmittelpunkt und verfolgt es zu dem Punkt, von wo es vor dem Zeitschritt hergekommen sein muss (Abbildung 5.1 C). Der Wert dieses Partikels wird dann in der neuen Position eingetragen. Der Ursprung des Partikels wird sich dann nicht in einem Zellenmittelpunkt befinden, von dem man dann die gesuchten Werte einfach übernehmen könnte. Es ist hier also eine Interpolation durch die am nächsten liegenden Nachbarzellen erforderlich. Abbildung 5.2 verdeutlicht dieses Vorgehen. Der gesuchte Wert kann durch lineare Interpolation gefunden werden, da die vier umgebenden Werte bekannt sind. Das Verfahren hat den Vorteil, dass es nicht von den CFL Bedingungen abhängt und so große Schrittweiten ermöglichen. Die CFL Bedingungen besagen, dass kein Partikel des Fluids in der Zeit Δt mehr als eine Gitterweite h zurücklegen darf. Allerdings führt dieses Verfahren zu einem numerischen Energieverlust. Das heißt, dass das Fluid schneller in seiner Bewegung gedämpft wird, als bei einem realen Fluid. Diesen Nachteil kann man aber durch Zufuhr einer externen Kraft in das System ausgleichen.

Abbildung 5.1: Partikelverfolgung

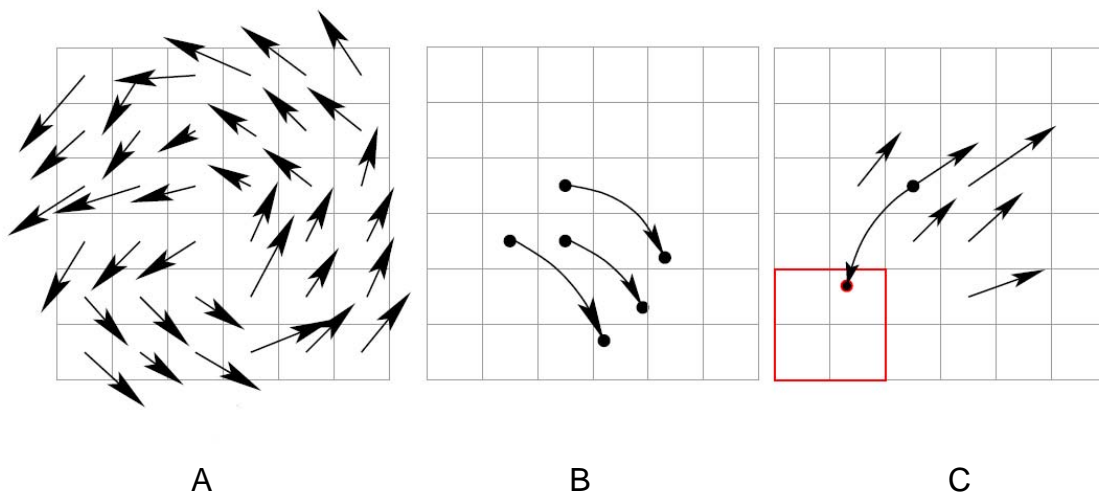
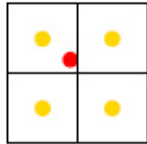


Abbildung 5.2: Interpolation der Voxelwerte



6. Vorticity Confinement

Fluide erscheinen realistisch, wenn diese rotierende und turbulente Strukturen enthalten. Durch die numerische Dämpfung werden diese Eigenschaften schnell unterdrückt. Eine Lösung, um diese Turbulenzen wieder zu erhalten, wäre eine zufällige Verwirbelung des Fluids. Dieses Vorgehen garantiert aber nicht, dass die Turbulenzen auch an den Stellen wieder zugefügt werden, an denen sie verloren gegangen sind. Das kann zu einem unrealistischen Verhalten führen. Eine bessere Methode mit dem Namen Vorticity Confinement wurde bereits 1994 von Steinhoff et al. [3] beschrieben. Die Grundidee dieser Methode ist, die durch die numerische Dissipation verloren gegangene Energie dem Vektorfeld wieder zuzuführen. Fedkiw et al. [4] verwendete 2001 diese Methode erstmalig in der Computergraphik. Statt der Geschwindigkeiten im Vektorfeld wird nun die Verwirbelung betrachtet. Der erste Schritt zur Berechnung ist also die Bestimmung der Stellen, an denen Rotationen auftreten. Die Gebiete mit Verwirbelung werden mit

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$$

bestimmt. Diese sogenannte vorticity (=Wirbelstärke, Vortizität) ist also ein Vektorfeld, welche die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes v angibt. Im 2D-Fall stehen die Vektoren senkrecht auf der Fluid-Ebene. Das Ergebnis kann also als Maß dafür genommen werden, wie hoch die Rotation an jeder Stelle im Fluid ist. Diese Rotation wird allerdings numerisch gedämpft. Um das zu verhindern, wird eine externe Kraft senkrecht zum Gradientenfeld des Wirbelfeldes hinzugefügt.

$$\mathbf{N} = \frac{\eta}{|\eta|} \quad (\eta = \nabla|\vec{\omega}|)$$

Das normierte Gradientenfeld ist mit \mathbf{N} angegeben. Der Gradientenvektor jeder Voxelzelle zeigt also auf den größten Anstieg der Stärke der Wirbelbildung. Senkrecht zu diesem Gradienten muss nun eine externe Kraft, die proportional zur Verwirbelung ist, hinzugefügt werden.

$$\vec{f}_{conf} = \varepsilon(\mathbf{N} \times \vec{\omega})$$

Der Faktor ε bestimmt die Stärke, mit der \vec{f}_{conf} wieder dem System zugefügt wird.

7. Erweiterungen

Vorticity Confinement führt dem System verloren gegangene Energie zu, verstärkt aber am Ende nur schon vorhandene Wirbel. Hochturbulente Effekte, wie Explosionen oder schnell fließendes Wasser können damit weiterhin schlecht dargestellt werden, da es einfach nie zu einer Wirbelausbildung kommt. Die von Andrew Selle, Nick Rasmussen und Ronald Fedkiw vorgestellte Technik nutzt die (Semi-) Lagrange-Wirbelpartikel-Methode und das Euler-Gitter, um die Nachteile beider Methoden zu kompensieren. Diese Technik nutzt Vorticity Confinement an sich, um beide Methoden zu koppeln. Wie genau, das wird jetzt näher erläutert.

7.1 Wirbelpartikel Methode (Vortex Particle Method)

Die Navier-Stokes-Gleichungen können in die so genannte vorticity-Form gebracht werden:

$$\omega_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega - (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mu \nabla^2 \omega + \nabla \times \mathbf{f}$$

Dabei wurde der Geschwindigkeitsadvektionsterm in einen vorticity Advektionsterm $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega$ und einen Wirbelstreckungs-term $(\omega \cdot \nabla) \mathbf{u}$ aufgespalten. Der Druckterm entfällt, weil wir die Dichte als konstant annehmen (inkompressibles Fluid). In der hier vorgestellten Methode trägt jedes Wirbelpartikel den Wirbelwert ω , dieser enthält sowohl Stärke, als auch die Richtung des Wirbels. Außerdem ist ein Verteilungskern (hier: Gauß'scher Verteilungskern) gegeben, der festlegt, wie genau die vorticity im Raum um den Partikel verteilt wird. Bei mehreren Partikeln wird die vorticity in einem Punkt im Raum durch Akkumulation bestimmt. Wirbel entstehen dann durch die Bewegung des Partikels im Fluid und die dadurch verursachte Änderung der vorticity. Normalerweise dürften die Wirbelpartikel nur an bestimmten Punkten in das System eingefügt werden, um die Wirbel korrekt aufzulösen. Die hier vorgestellte Methode verlangt jedoch keine genaue Verteilungs- bzw. Wiederverteilungsfunktion, weil die Gittermethode die Strömungen ausreichend genau auflöst. Durch die Abnahme der Geschwindigkeitswerte aus dem Gitter müssen auch niemals Partikel neu gesetzt oder neu verteilt werden. Die Geschwindigkeit des Gitters wird über trilineare Interpolation auf die korrespondierenden Partikel übertragen.

Die Einspeisung der Wirbelpartikel in das System geschieht meist an einer Quelle. Dabei werden sie in gleichmäßigen Abständen mit einer Initial-vorticity in das System (Fluid) injiziert. Man lässt sie dann einfach passiv durch das Fluid treiben. Dabei ist die Quelle nicht festgelegt. Man könnte die Partikel auch in der Nähe von Objekten oder in hohen Wirbelkonzentrationen einspeisen und dabei die umgebende vorticity als Initial-vorticity vorgeben.

Außerdem ist durch die Gittermethode ein Geschwindigkeitsgitter mit korrekten Grenzbedingungen gegeben, welche ansonsten noch kompliziert für die Partikel aufgestellt werden müssten. Ein weiterer Vorteil in dieser Methode ist, dass die

Partikel durch dieses Geschwindigkeitsgitter getrieben werden. Dadurch werden schon automatisch Hindernisse im System umgangen. Da die Strömung selber durch das Gitter um das Hindernis geleitet wird. Sollten die Partikel doch in ein Hindernis hineingeraten, könnte man sie einfach löschen oder wieder außerhalb der Geometrie projizieren. Da normalerweise eine hohe Anzahl an Wirbelpartikeln genutzt wird, genügt es, wenn man nur eine dieser Möglichkeiten nutzt.

Rechts ist eine Anwendung der Interaktion von Wirbelpartikeln mit komplexer Geometrie dargestellt: es entsteht ein reißender Strom. Dabei wurden ca. 800 Wirbelpartikel genutzt und das Voxelgitter hatte eine Auflösung von $272 \times 112 \times 272$. Partikel, die in die Geometrie eintreten, werden, wie oben beschrieben, gelöscht.



Neben dem vorticity-Advektionsterm, also dem Teil der Gleichung, der für die Bewegung der Partikel durch das Fluid verantwortlich ist, müssen wir noch den Wirbelstreckungsterm betrachten. Dies wird getan, indem wir die Werte des Geschwindigkeitsvoxelgitters ableiten und über trilineare Interpolation auf die

Partikel, mit Hilfe von $\omega += \Delta t(\omega \cdot \nabla)u$, übertragen. Dadurch ändert sich sowohl der Betrag, als auch die Richtung der Partikel-vorticity. Leider kann es passieren, dass dadurch der Betrag unter Umständen exponential ansteigt. Um die Stabilität im System zu wahren, könnte man zum Einen den Betrag begrenzen oder z.B. nur den Wert verkleinern, nicht aber vergrößern lassen. Dies würde aber unserem Hauptziel, der Wahrung der vorticity-Konzentration im System widersprechen. Deswegen skalieren wir einfach den Endwert der vorticity zurück, um so den „Gesamtwert“ an vorticity im System zu wahren.

Letztendlich wird durch diese Methode der Wirbelstreckungsterm nur durch Änderung der Richtung, nicht aber des Betrags umgesetzt. Durch diese Vorgehensweise limitiert man zwar die numerische Genauigkeit der Wirbelpartikelmethode aber man erhält im Gegenzug, durch die Wirbelpartikel und deren Wahrung der vorticity-Konzentration in Verbindung mit dem festen Geschwindigkeitsgitter, wirklichen Detailgrad in der Beschreibung von Strömungen.

7.2 Wertübertragung der vorticity confinement Kraft auf das Gitter

Die vorticity-Form der Navier-Stokes-Gleichung kann in die Konservierungsform

umgewandelt werden: $\omega_t^T + \nabla \cdot (u\omega^T - \omega u^T - \mu(\nabla\omega)^T - f^*) = 0$

Wobei f^* jetzt eine auf f basierende schiefsymmetrische Kreuzproduktmatrix ist. Diese Gleichung zeigt klar auf, dass die vorticity konserviert werden muss. Also sollte weder vorticity hinzugefügt, noch zerstört werden. Dies zeigt auch das Hauptproblem der Arbeit von Felici und Drela[3] auf, die genau dies nicht beachtet haben. Sie nutzten eine Methode, welche die vorticity-Daten direkt von den Wirbelpartikeln auf das gitterbasierte Geschwindigkeitsfeld überträgt. Dadurch wird die Gesamtvorticity des Geschwindigkeitsfeldes nicht bewahrt, da sie eben die vorticity-Werte ohne Betrachtung der Konservierung der Gesamtvorticity ändern.

Andrew Selle, Nick Rasmussen und Ronald Fedkiw glauben, dass gerade die Wahrung, bzw. Konservierung der Gesamtvorticity der Schlüssel zu einer höheren visuellen Qualitätsstufe ist. Außerdem würden sonst Strudel scheinbar grundlos auftreten können.

Die Schlüsselinnovation ist also, die externe Kraft f aus der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichung zu nutzen, um das Geschwindigkeitsfeld anhand der vorticity-Werte, unter Wahrung der Gesamtvorticity, zu ändern. Unsere Konservierungsform der vorticity-Form, die wiederum aus der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichung abgeleitet wurde, zeigt, dass jegliche Volumenkraft in dem System die vorticity konserviert, also bewahrt. Und die vorticity confinement Kraft ist der einzig bekannte Weg, vorticity auf die richtige Art und Weise dem System zuzuführen.

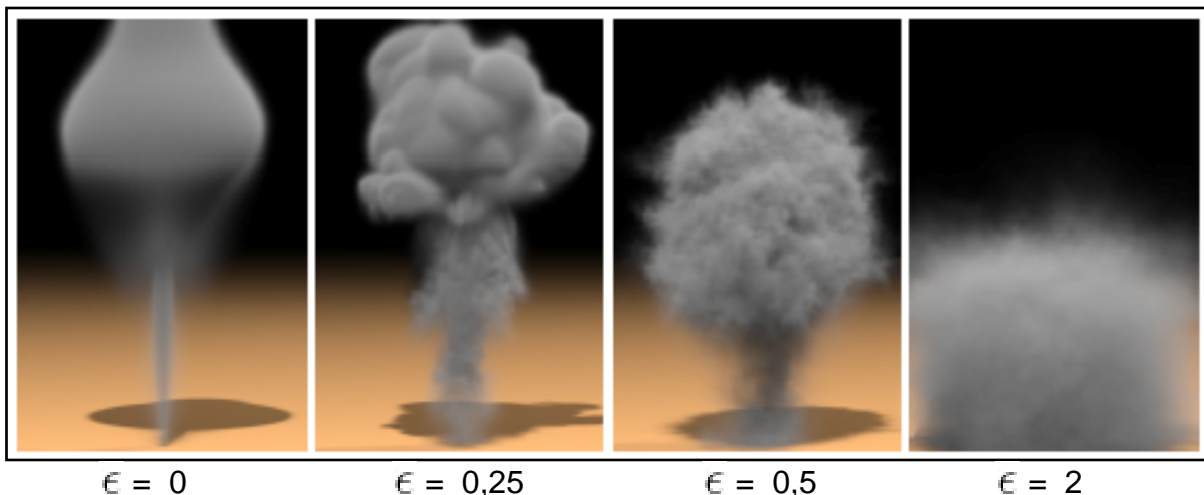
Die einfachste Möglichkeit dies zu tun, ist sicherlich einzig und allein, den Betrag der vorticity (die Richtung wird also weg gelassen) der Wirbelpartikel zu nutzen, um eine sich regional ändernde confinement-Kraft ϵ zu definieren und diese von den Partikeln mit Hilfe eines Verteilungskernes auf das Gitter zu übertragen. Das erlaubt der vorticity-confinement-Kraft, unabhängig von der vorhandenen vorticity des Gitters, aktiviert zu werden. Dies würde allerdings die Richtung der vorticity der Wirbelpartikel ignorieren. Aber schon dieser einfache Ansatz führt zu sehr beeindruckenden visuellen Phänomenen, die mit vorticity confinement allein, nur sehr schwer zu erreichen wären.

Im Beispiel rechts, haben Andrew Selle, Nick Rasmussen und Ronald Fedkiw z.B. schon mit diesem einfachen Ansatz große und glaubhafte Explosionseffekte für einen Featurefilm simuliert.



Es wäre allerdings viel besser, eine confinement-Kraft für jedes einzelne Partikel unabhängig von einander zu bestimmen. Dafür benötigen wir einen Verteilungskern $\xi_p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)$, welcher dann zusammen mit der Partikel-vorticity ω_p zu einer so genannten analytischen vorticity $\tilde{\omega}_p(\mathbf{x}) = \xi_p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)\omega_p$ führt. Wobei \mathbf{x} eine beliebige Position im Raum darstellt (an der die vorherrschende vorticity bestimmt werden soll) und \mathbf{x}_p steht für die Position des Partikelmittelpunktes. Durch die Wahl eines rotationssymmetrischen und streng monoton fallenden (mit steigender Entfernung vom Partikelmittelpunkt) Verteilungskernes wird praktisch schon impliziert, dass die verwendete confinement-Kraft für ein Partikel über $F_p(\mathbf{x}) = \epsilon_p(\mathbf{N}_p \times \tilde{\omega}_p)$ bestimmt wird. Wobei der normalisierte Abstand von Punkt \mathbf{x} zum Partikelmittelpunkt über $\mathbf{N}_p(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}_p - \mathbf{x})/\|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}\|$ bestimmt wird. Es wird also das Kreuzprodukt zwischen dem normalisierten Abstand und der analytischen vorticity (welche dreidimensional als Rotation des Geschwindigkeitsfeldes angegeben wird) bestimmt. Der resultierende Vektor wird dann noch über die partikelbasierte vorticity confinement Kraft ϵ_p skaliert. Wir können damit die analytische confinement Kraft eines jeden Punktes aufsummieren, um so das gitterbasierte Kraftfeld, welches für die Lösung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichung benötigt wird, berechnen zu können.

Abschließend ist noch hinzuzufügen, dass die hier vorgestellte Methode für gut gewählte, also zum Kontext passende (siehe Beispiele) Parameterwerte sehr gute Ergebnisse liefert. Dagegen kann die Simulation auch sehr leicht durch die Wahl einer zu hohen confinement Kraft (Instabilität) zerstört werden (siehe Bild unten).



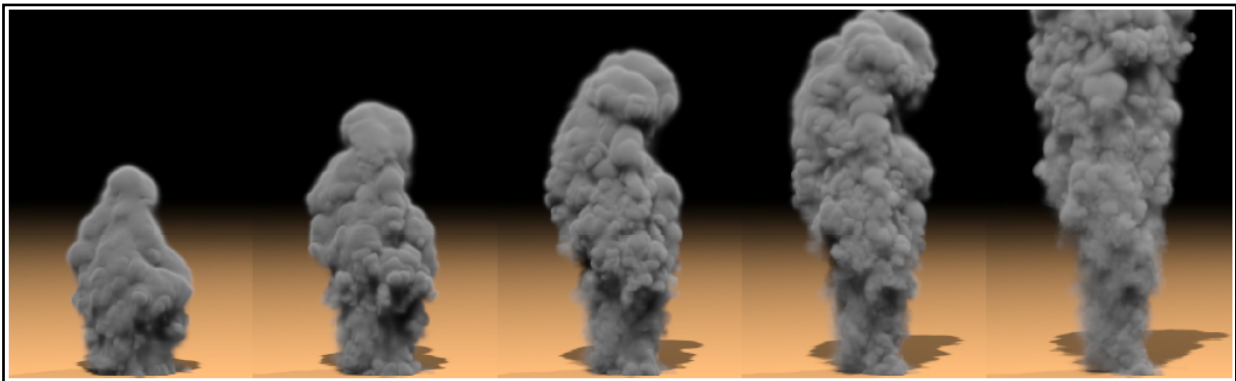
Die hier dargestellten Simulationen zeigen, dass eine zu hohe confinement-Konstante Artefakte und Instabilität hervorrufen. Ein zu hoher ϵ Wert verhindert den Aufstieg des Rauches durch massive Wirbelbildung sogar ganz.

8. Beispiele

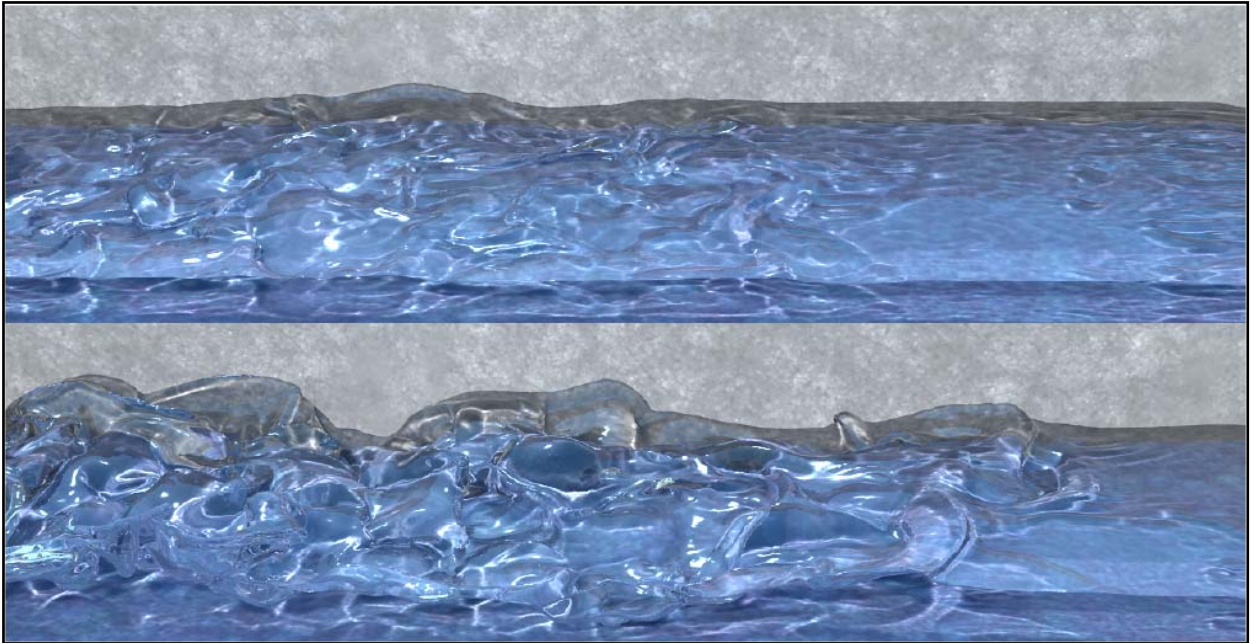
Die hier vorgestellte Methode wurde auf gleichmäßigen Gittern und Octreegittern implementiert und es wurde eine Vielzahl an unterschiedlichsten Beispielen generiert. Interessant ist, dass der Mehrwert an Rechenzeit durch die Benutzung von Wirbelpartikeln vernachlässigbar gering ist (weniger als 5%). In den meisten Beispielen wurde dieser Gaußkern als Verteilungskern genutzt,

$$\xi_p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = e^{-\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p\|^2 / 2r^2} / (r^3 (2\pi)^{3/2})$$

um die vorticity confinement Kraft auf das Gitter zu übertragen. Sobald der Betrag der Differenz aus der Position \mathbf{x} und dem Partikelmittelpunkt kleiner als der Radius r sein sollte, wird 0 zurückgegeben. So wirkt ein Partikel wirklich nur innerhalb des Radius auf das Gitter ein.



In diesem Beispiel wird eine Animation von sich entwickelndem Rauch von links nach rechts dargestellt. Die Auflösung des Gitters beträgt $180 \times 260 \times 180$ und es wurden ca. 6000 Wirbelpartikel genutzt. Die Partikel wurden zum Zeitpunkt der Explosion, die eine halbe Sekunde dauerte, an der Explosionsquelle in die Simulation eingespeist. Außerdem wurden danach Partikel mit zufälliger Position platziert. Die Richtung wurde dabei tangential von einem, um den Mittelpunkt der Explosion nach oben zeigenden Zylinder abgenommen. Der Wirkungsradius eines Partikels wurde auf 4 Voxel festgelegt und eine Partikel-vorticity von 0,002 genutzt.



Diese Bilder zeigen, dass die hier vorgestellte Methode auch sehr gut geeignet ist, um Turbulenzen in Flüssigkeiten aufzulösen bzw. zu simulieren. Es wurden dabei links, am „Anfang“ des Stromes mit zufälliger Position (entlang der Ebene im Stromeingang) Wirbelpartikel eingespeist, während die Richtung der Partikel entweder hoch oder runter zeigt. Während sie von links nach rechts fließen, entstehen dadurch ringförmige Wirbel und Turbulenzen. Um größere Strudel und Wirbel darstellen zu können, wurde der Gaußkernradius auf 40 erhöht. Im oberen Bild wurde ein Partikel-vorticity confinement Wert in Höhe von 0,001 und im unteren Bild von 0,005 genutzt. Die Auflösung des Gitters beträgt dabei 320 x 128 x 320 und es wurden ca. 600 Wirbelpartikel genutzt.

Die hier gezeigten Explosionen nutzen nur den vorticity Betrag ϵ , ohne die confinement Kraft für jedes Partikel zu bestimmen. Die Auflösung des Gitters beträgt hier 100 x 100 x 100. Es wurden ca. 200-400 Wirbelpartikel genutzt, deren Wirkungsradius auf 3 Voxelzellen beschränkt wurde.



9. Zusammenfassung

Zusammenfassend kann man sagen, dass die hier vorgestellte Methode als ein klassischer Navier-Stokes-Löser unter Hinzunahme von einem Semi-Lagrange-Partikelansatz bezeichnet werden kann. Dabei wird ein festes Euler-Gitter genutzt, um das Geschwindigkeitsfeld aufzulösen. Während die Wirbelpartikel dazu genutzt werden entstehende Wirbel durch die Unabhängigkeit des Gitters besser auflösen zu können. Dabei tragen die Wirbelpartikel die vorticity-Daten, also Betrag und Richtung der Wirbel. Der Gitteransatz gilt als zu grob, um schnelle und kleinere Turbulenzen aufzulösen, während der Semi-Lagrange Ansatz unter einer hohen numerischen Dissipation leidet. Durch die Hybridisierung beider Ansätze und die korrekte Kopplung dieser, über eine normalisierte, kräftekonservierende Wertübertragung von der vorticity confinement Kraft der Wirbelpartikel auf das Gitter, entsteht eine schnelle und visuell hochwertige Möglichkeit, eben solche schnellen und turbulenten Phänomene zu simulieren. Dabei ist man weder an Gas- noch an Flüssigkeits-simulationen gebunden, diese Methodik liefert in beiden Medien hervorragende Ergebnisse. Nachteilig ist neben der, aus Sicht der Strömungsmechaniker ungenauen Simulation, die Festlegung der Partikel-vorticity, welche sehr großen Einfluss auf die Simulation hat. Dieser Wert muss empirisch ermittelt und manuell justiert werden.

10. Ausblick

Um die Genauigkeit der hier vorgestellten Methode noch zu erhöhen, könnte man die gitterbasierten vorticity-Daten zu den Partikelpositionen trilinear interpolieren, um so die Stärke der partikelbasierenden vorticity-Kraft zu reduzieren, da dann die existierende Gitter-vorticity als Partikel-vorticity auftritt. Natürlich wäre das Gitter in der Praxis zu grob, als dass die gitterbasierte vorticity der Partikel-vorticity entsprechen könnte. Aber alternativ könnte man zu dem Betrag noch die Richtung der Partikel-vorticity mit auf das Gitter übertragen und diese dann mit der schon vorhandenen Gitter-vorticity vergleichen. Die vorhandene Differenz könnte man dann nutzen, um die vorticity confinement Kraft so zu errechnen, dass die vorticity in den Formeln durch die Differenz ersetzt wird. Diese Zusätze schienen aber bis jetzt nicht notwendig zu sein, sie würden aber die vorticity confinement Kraft viel besser regulieren, allerdings nur unter größeren Anforderungen an Speicherkapazität und Rechenkraft. Gut wäre, außer der Erhöhung der Genauigkeit, noch eine Möglichkeit, die Partikel vorticity confinement Konstante eventuell automatisch bestimmen zu lassen. Vorgaben wären dann eventuell schon vorhandene und validierte Werte, die

dann automatisiert an Medium, Gittergröße und gewünschte Wirbelgröße angepasst werden.

Interessant wäre auch noch eine gesonderte Betrachtung der Visualisierung dieser Phänomene, so werden die Wirbelpartikel nur zum Übertragen und Ermitteln der vorticity-Daten genutzt, nicht aber zur Visualisierung. So könnte man z.B. ein äquidistantes Gitternetz an hohen Wirbelkonzentrationsstellen höher auflösen, um die Turbulenzen an sich besser darstellen zu können. Momentan ist die Visualisierung immer noch an ein festes Gitter gebunden, Octrees werden nur zur Beschleunigung der Berechnung/Darstellung genutzt, nicht aber zur visuellen Verbesserung.

11. Literaturverzeichnis

- [1] Selle, Rasmussen und Fedkiw, 2005. A Vortex Particle Method for Smoke, Fire and Explosions. SIGGRAPH 2005.
- [2] Felici, H.M. und Drela, 1990. Eulerian/lagrangian solution of 3-d rotational flows. In AIAA 21st Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference.
- [3] Steinhoff und Underhill, 1994. Modification of the euler equations for „vorticity confinement“: Application to the computation of interacting vortex rings. Physics of Fluids.
- [4] Fedkiw, Stam und Jensen, 2001. Visual Simulation of Smoke. In Eugene Fiume, editor, SIGGRAPH 2001, Computer Graphics Proceedings, pages 15-22. ACM Press / ACM SIGGRAPH.