

# Simulation von Gasen auf Hybrid-Netzen

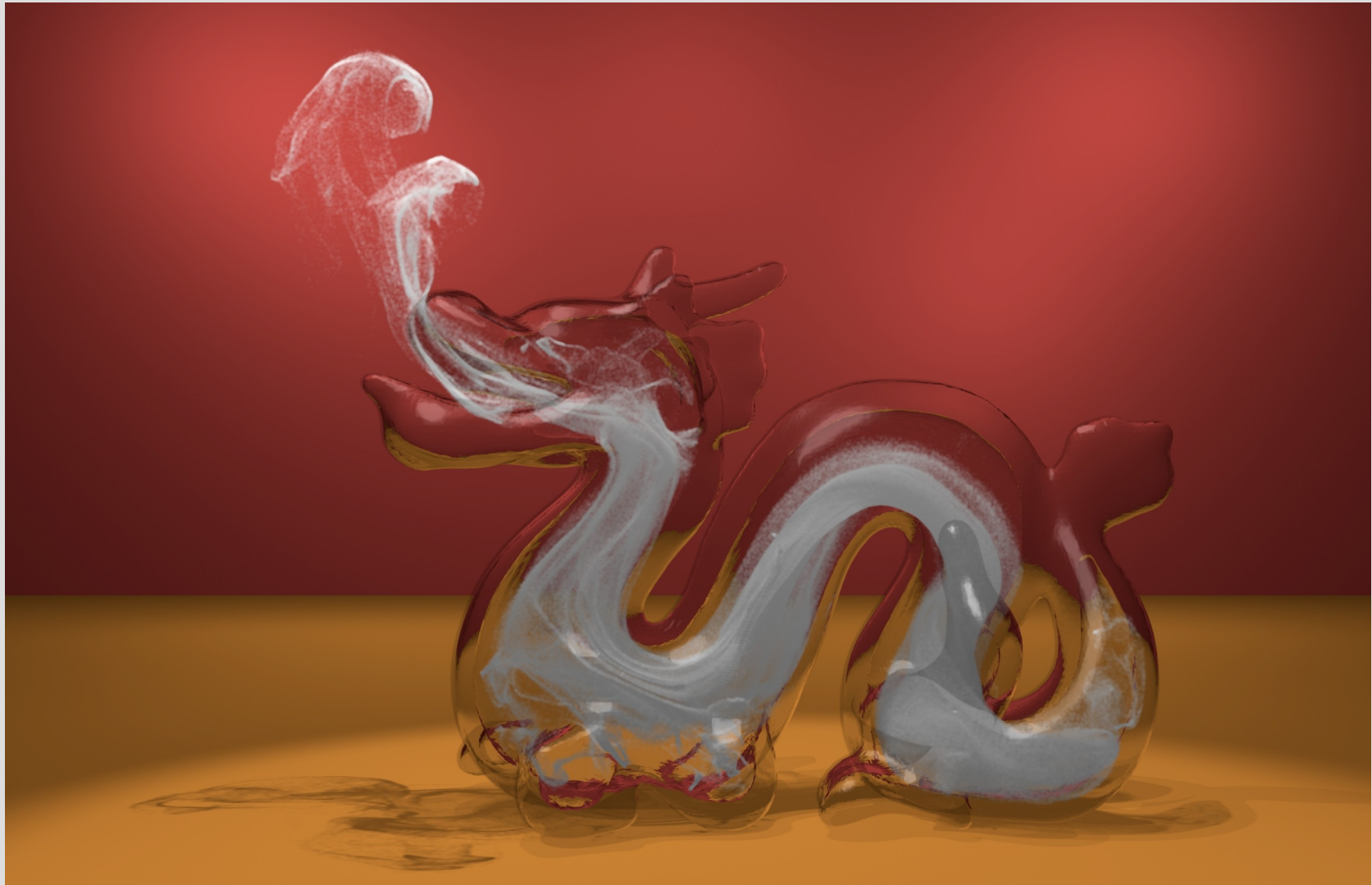
Ein Vortrag von:

Stephan Diestelhorst  
Wintersemester 2005/2006

Hauptseminar Graphische Datenverarbeitung

Lehrstuhl Computergrafik und Visualisierung  
Fakultät Informatik  
TU Dresden

# Wo wollen wir hin?



# Gliederung

- Grundlagen
  - Skalar- & Vektorfelder
  - Operationen auf Feldern
  - 2. Newtonsches Axiom

# Gliederung

- Grundlagen
  - Skalar- & Vektorfelder
  - Operationen auf Feldern
  - 2. Newtonsches Axiom
- Simulation auf Quadernetzen
  - Navier-Stokes
  - Diskretisierung
  - Lösung nach [Stam, „Stable Fluids“]

# Gliederung

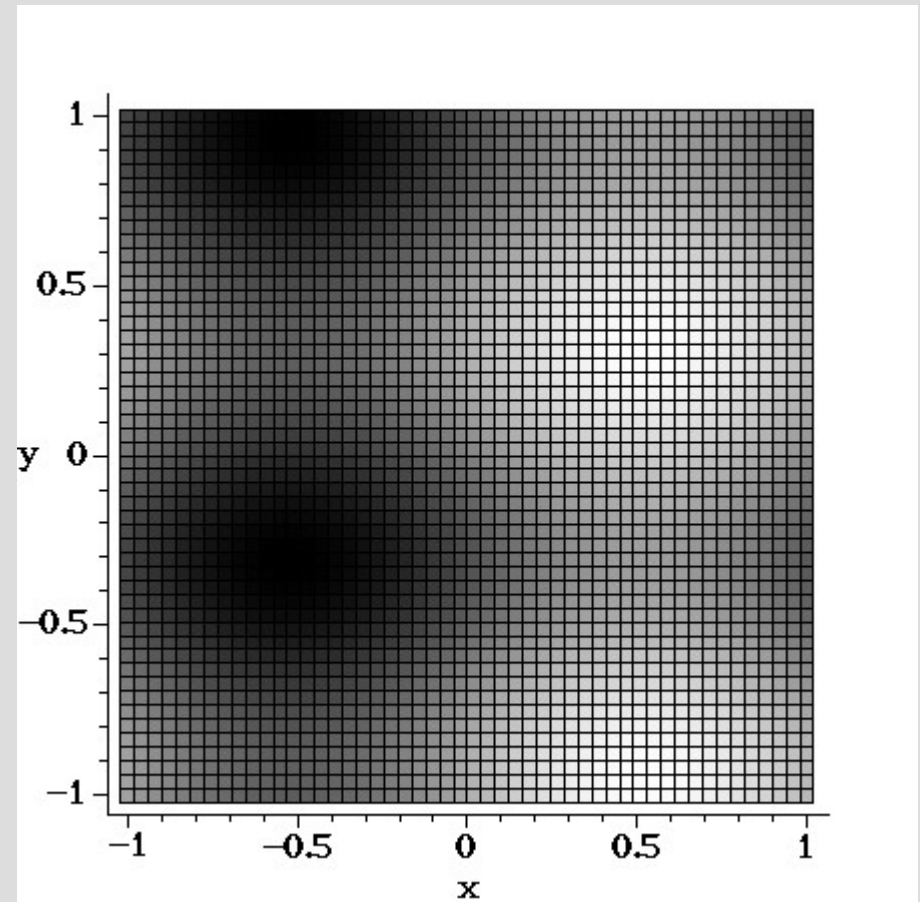
- Grundlagen
  - Skalar- & Vektorfelder
  - Operationen auf Feldern
  - 2. Newtonsches Axiom
- Simulation auf Quadernetzen
  - Navier-Stokes
  - Diskretisierung
  - Lösung nach [Stam, „Stable Fluids“]
- Hybride Netze
  - Vorteile
  - Veränderung gegenüber Quadernetzen

# 1. Grundlagen

- Skalarfelder
  - ordnen jedem Punkt im Raum einen skalaren Wert zu

$$f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$$

z.B. Temperatur,  
Druck

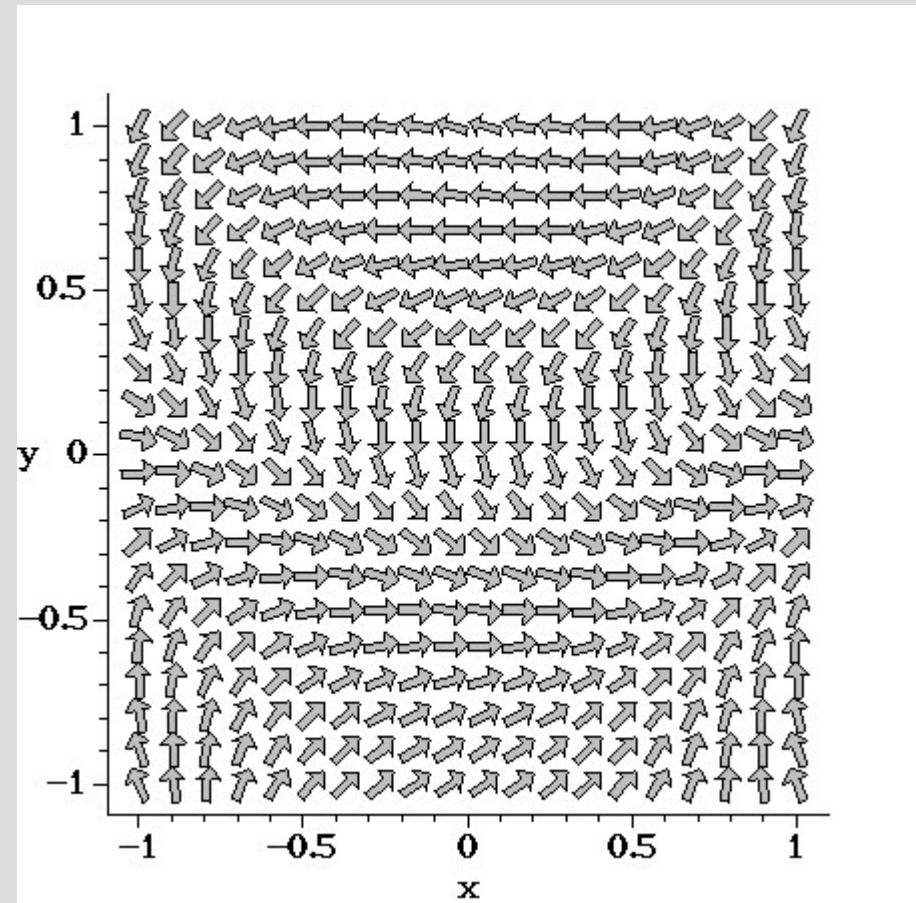


# 1. Grundlagen

- Vektorfelder
  - ordnen jedem Punkt im Raum einen Vektor zu

$$f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$$

z.B. Strömungen



# 1. Grundlagen

- Operationen auf Vektorfeldern
  - Nabla-Operator  $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \vec{e}_x} \\ \frac{\partial}{\partial \vec{e}_y} \\ \frac{\partial}{\partial \vec{e}_z} \end{pmatrix}$$

# 1. Grundlagen

- Operationen auf Vektorfeldern

- Nabla-Operator  $\vec{\nabla}$

Für kartesische  
Koordinaten

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \vec{e}_x} \\ \frac{\partial}{\partial \vec{e}_y} \\ \frac{\partial}{\partial \vec{e}_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

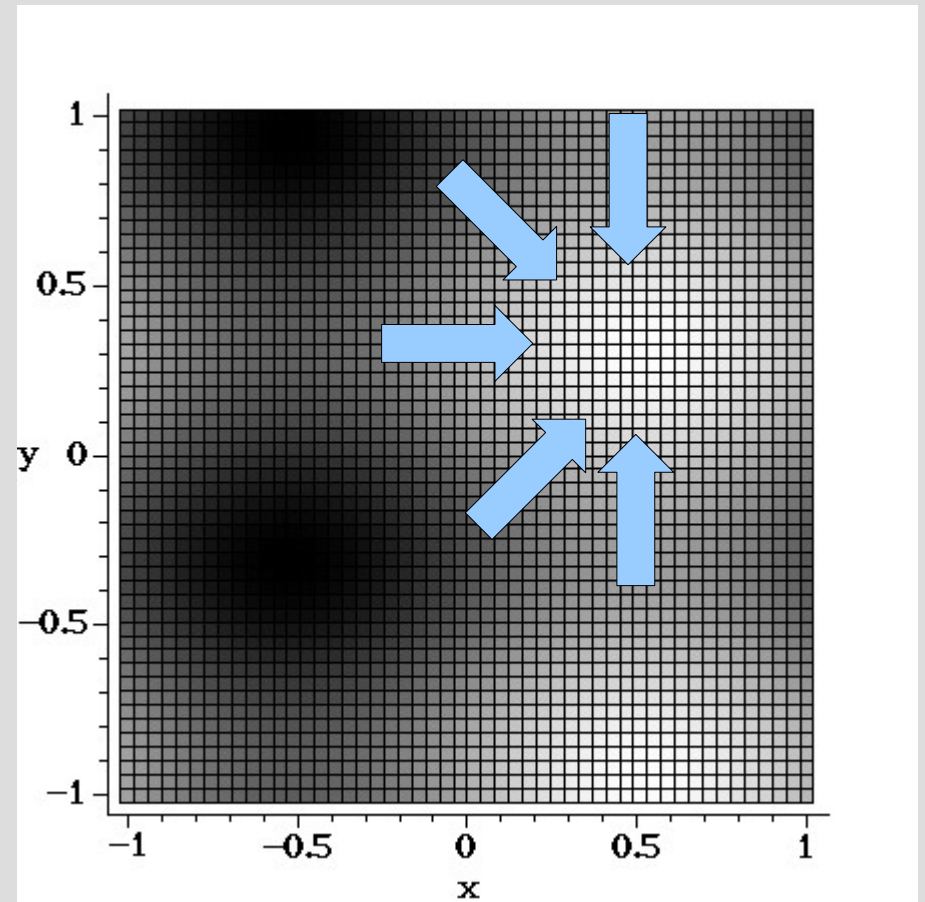
# Operationen auf Feldern

- Gradient des Skalarfeldes

Sei  $p(\vec{x})$  ein Skalarfeld.

$$\text{grad } p = \vec{\nabla} p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix}$$

=> Vektorfeld!

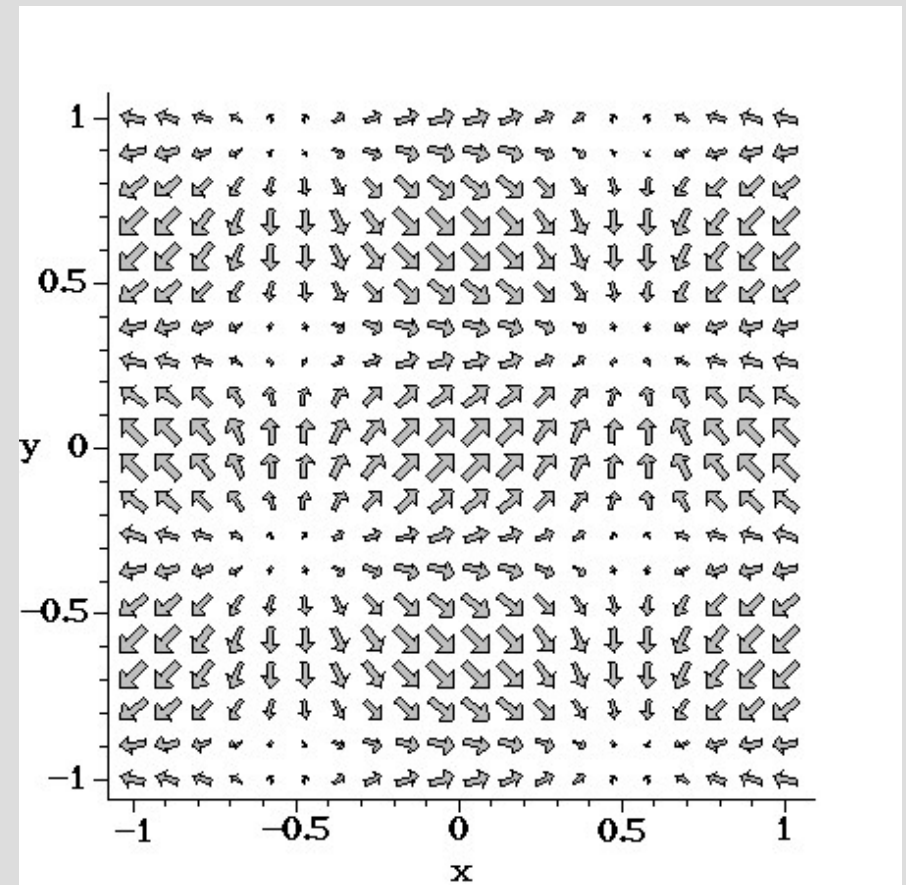


# Operationen auf Feldern

- Gradient des Skalarfeldes

Eigenschaften:

- Vektorfeld
- zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs
- wirbelfrei



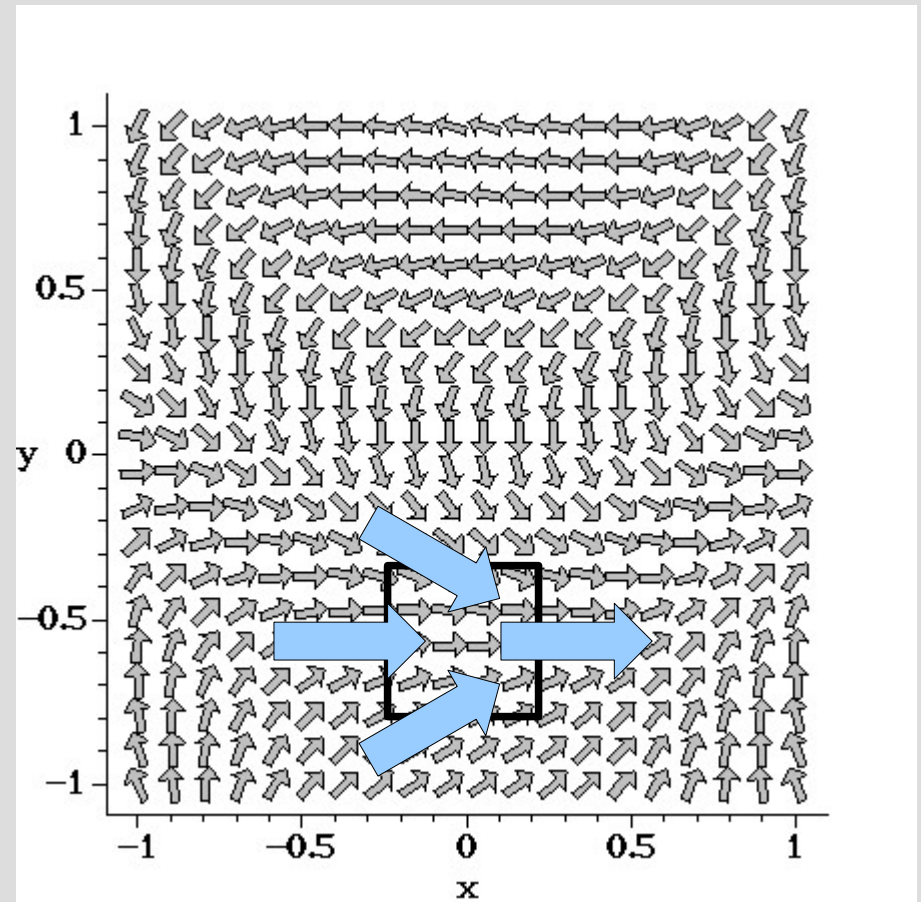
# Operationen auf Feldern

- Divergenz des Vektorfeldes

Sei  $\vec{u}(\vec{x})$  ein Vektorfeld.

$$\operatorname{div} \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \left( \frac{\partial \vec{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{u}_z}{\partial z} \right)$$

=> Skalarfeld!

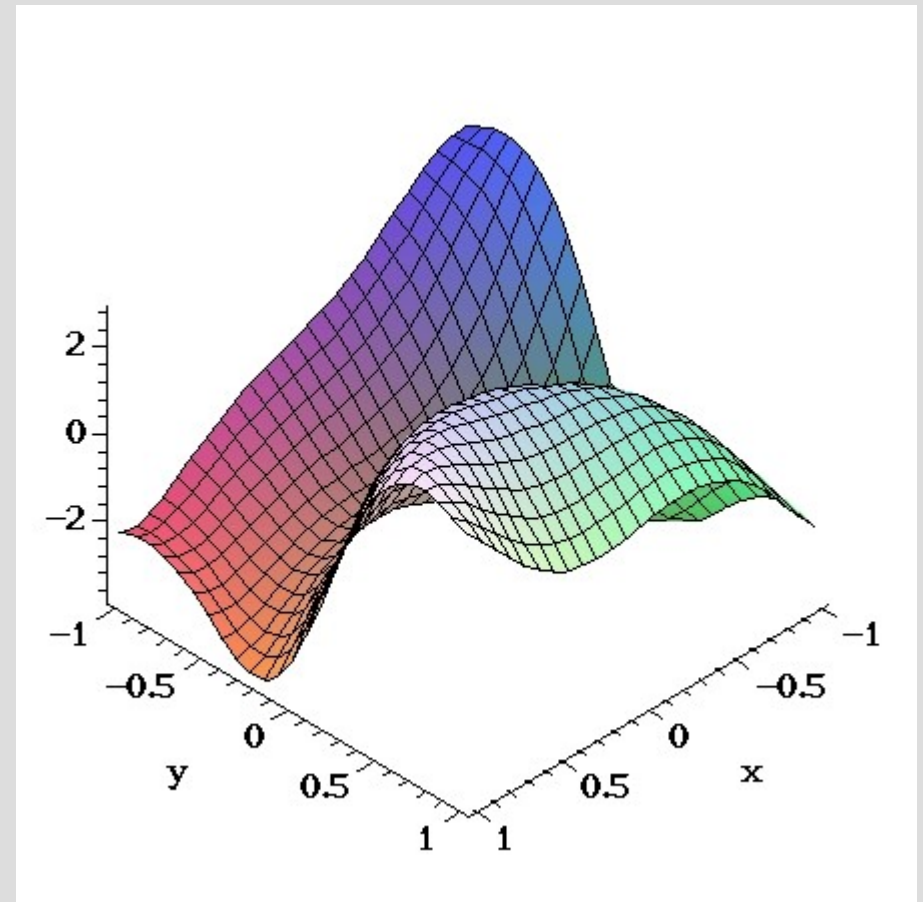


# Operationen auf Feldern

- Divergenz des Vektorfeldes

Eigenschaften:

- Skalarfeld
- Summe der Zu- und Abflüsse in ein (kleines) Element des Raums



# Operationen auf Feldern

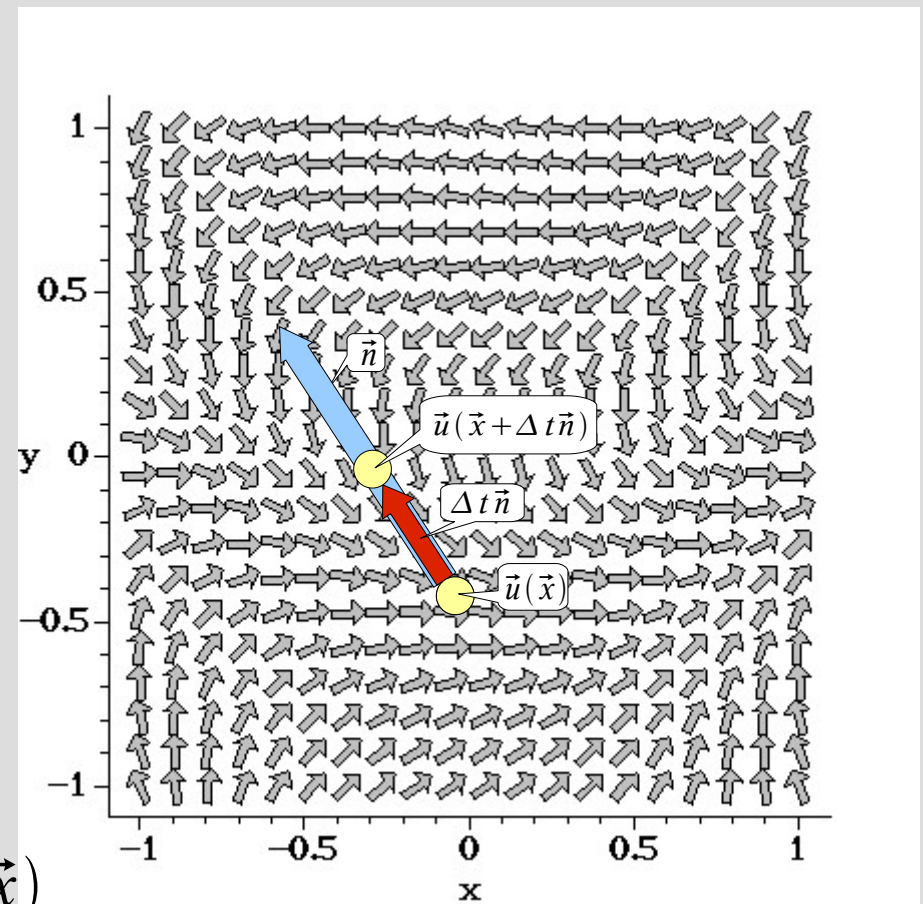
- Richtungsableitung / Vektorgradient

Bekannt: Zeitliche Ableitung / Änderung der Feldgrößen

Neu: Erfassen der Änderung / des Zusammenhangs der Feldgrößen an „benachbarten“ Stellen

=> Richtungsableitung

$$(\vec{n} \text{ grad}) \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(\vec{x} + \Delta t \vec{n}) - \vec{u}(\vec{x})}{\Delta t}$$



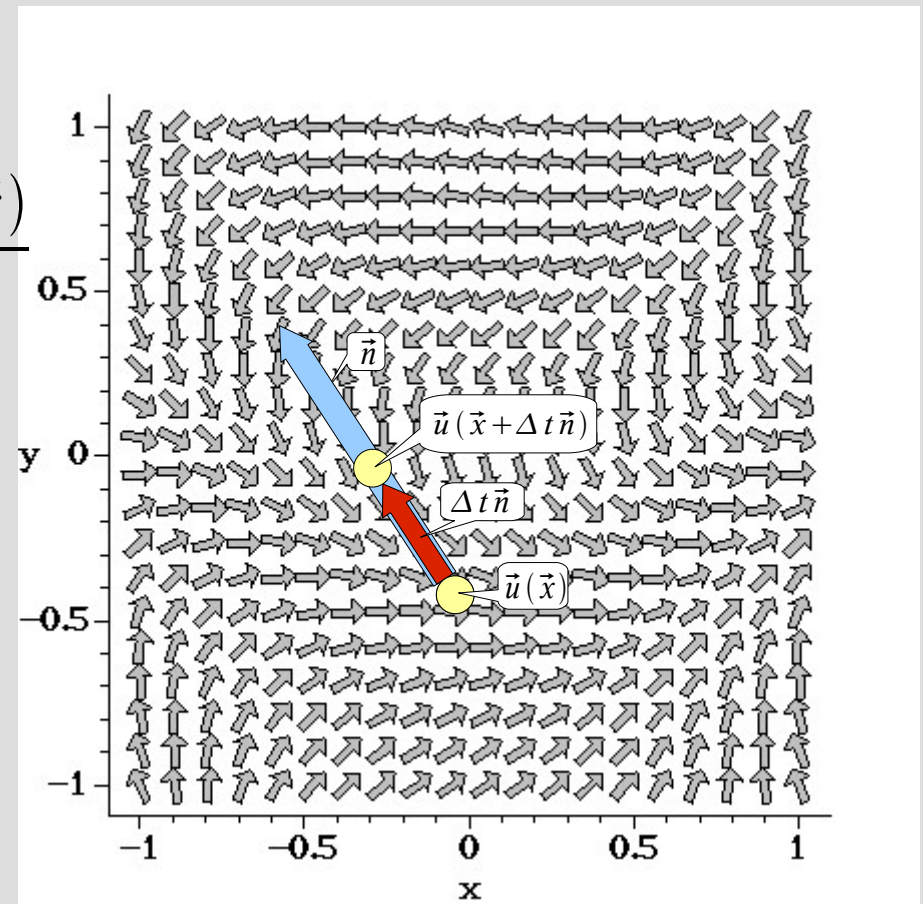
# Operationen auf Feldern

- Richtungsableitung / Vektorgradient

$$(\vec{n} \text{ grad}) \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(\vec{x} + \Delta t \vec{n}) - \vec{u}(\vec{x})}{\Delta t}$$

anders:

$$(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

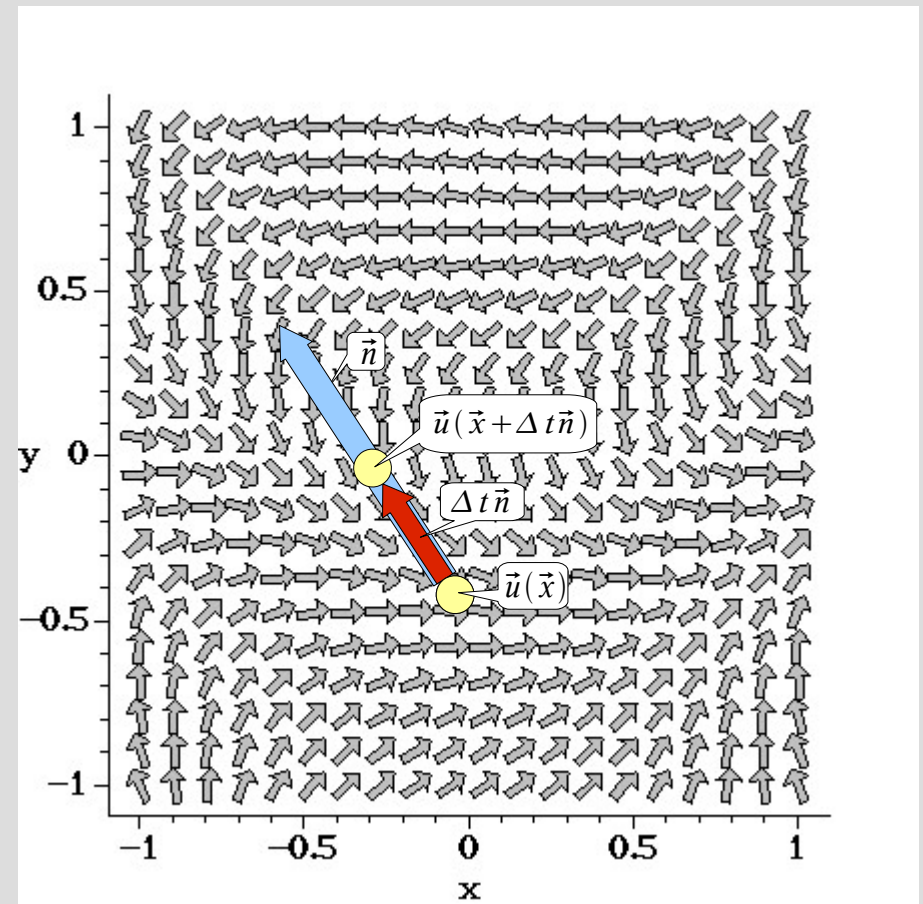


# Operationen auf Feldern

- Richtungsableitung / Vektorgradient

$$(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

=> (richtungsabhängige)  
Wichtung der Richtungs-  
ableitungen der Komponenten



## 2. Newton'sches Axiom

- Änderung der Bewegung durch eine Kraft
- Impulsänderung = Kraftstoß

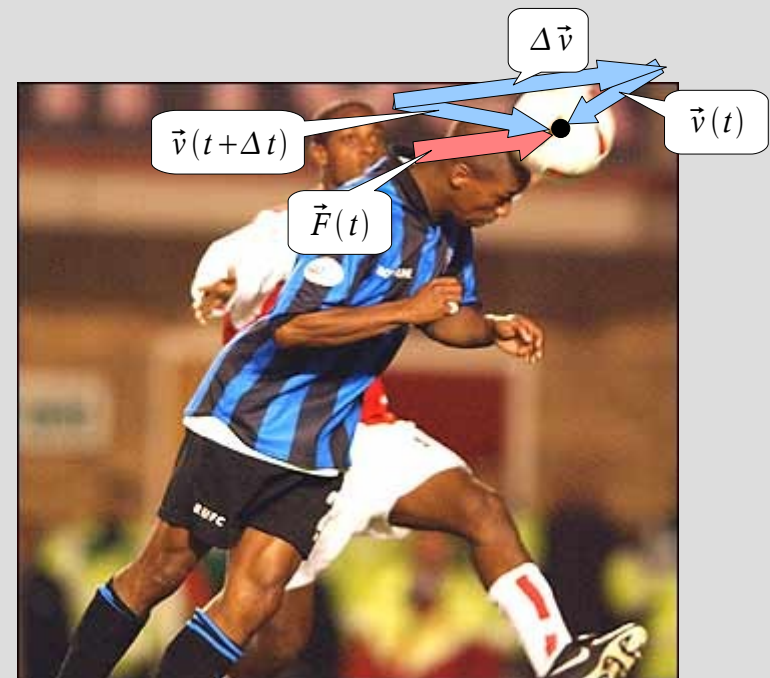
$$\Delta \vec{I} = \vec{P}$$

$$\Delta(m \cdot \vec{v}) = \vec{F} \cdot \Delta t$$

Annahme konstanter Massen,  
infinitesimal kleinen Zeiten:

$$\Delta(m \cdot \vec{v}) \rightarrow d(m \cdot \vec{v}) =$$

$$m \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot dt$$



# Zusammenfassung

- Physikalische Größen sind oft Feldgrößen
  - veränderlich in Ort (und Zeit !)
  - Unterschied Vektor- / Skalarfelder
  - neue Operationen auf Feldern aufgrund neuer Zusammenhänge zwischen „benachbarten“ Punkten im Feld
- Zusammenhang zwischen Kraft und Geschwindigkeit über zweites Newtonsches Axiom
- => Jetzt alles zusammensetzen und endlich simulieren!

## 2. Simulation von Gasen auf regelmäßigen Hexaedern

- Literatur: [Stam, 1999 „Stable Fluids“]
- basiert auf Navier-Stokes Gleichung  
Annahmen über Fluid:
  - inkompressibel
  - reibungsfrei
- Diskretisierung des Raums in ein regelmäßiges Quadrigitter
- zeitliche Integration mit „bedingungslos stabilem“ Verfahren

## 2. Simulation von Gasen auf regelmäßigen Hexaedern

### Kommentare:

- physikalisch korrekter Darstellungsweise  
(zuerst von Foster und Metaxas 1996, „Realistic Animation of Fluids“, vorher 2D Lösungen, Oberflächenwellen...)
- (relativ) lange Zeitschritte möglich  
(vgl. Foster und Metaxas 1996, mit explizitem Löser)
- Quader passen schlecht an schräge Begrenzungsflächen!

# Navier-Stokes

- Beschreibungsgleichung des Strömungsfeldes
  - Vektorfeld der Strömungsgeschwindigkeiten eines Fluids
- hier Annahme eines reibungsfreien Fluids => Auslassung des Viskositätstermes

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{f} + \frac{\vec{\nabla} \vec{p}}{\rho}$$

# Navier-Stokes

- Kompliziert? Betrachtung der einzelnen Teilterme!

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$$

Veränderung der Geschwindigkeit eines Partikels

$$\vec{f}$$

Krafteinwirkung durch Schwerkraft, Auftrieb, ...

$$\frac{\vec{\nabla} \vec{p}}{\rho}$$

Druckunterschied

- Einheiten?

$$\left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{\text{m}} \right) \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\left[ \frac{\vec{\nabla} \vec{p}}{\rho} \right] = \frac{1}{\text{m}} \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} = \frac{\text{N}}{\text{kg}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad [\vec{f}] = \text{N} ? \quad \Rightarrow \text{geeignet skalieren!}$$

# Navier-Stokes

- Wieso? Woher? Ähnlichkeit erkannt?

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{f} + \frac{\vec{\nabla} \vec{p}}{\rho}$$

# Navier-Stokes

- Wieso? Woher? Ähnlichkeit erkannt?

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{f} + \frac{\vec{\nabla} \vec{p}}{\rho}$$

Änderung der Geschwindigkeit eines Partikels

$$\frac{d \vec{v}}{d t}$$

# Navier-Stokes

- Wieso? Woher? Ähnlichkeit erkannt?

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{f} + \frac{\nabla \vec{p}}{\rho}$$

Beschleunigende Kraft....

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

# Navier-Stokes

- Wieso? Woher? Ähnlichkeit erkannt?

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{f} + \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}}{\rho}$$

...und inverse Masse

$$\frac{d \vec{v}}{d t} = \frac{\vec{F}}{m}$$

# Navier-Stokes

- Wieso? Woher? Ähnlichkeit erkannt?

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{f} + \frac{\vec{\nabla} \vec{p}}{\rho}$$

...und inverse Masse

$$\frac{d \vec{v}}{d t} = \frac{\vec{F}}{m}$$

=> Zweites Newton'sches Axiom!  
(für ein Partikel des Fluids)

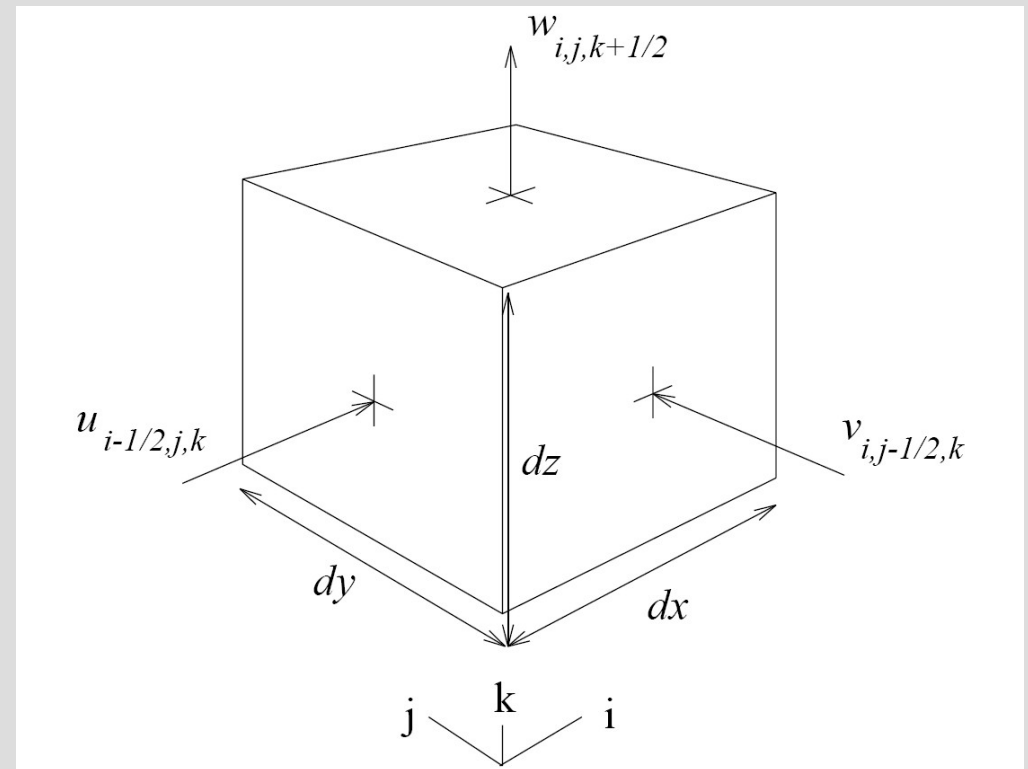
# Lösen von Navier-Stokes

- Differentialgleichung in Zeit und Raum  
=>Diskretisierung von beidem!
- Diskretisierung des Raums:
  - Partikel (LaGrange-Betrachtungsweise)
  - reguläre Gitter (i.A. Quadrigitter)
  - allg. Polyeder-Gitter (->Tetraeder)
  - „meshless methods“
- Diskretisierung der Zeit:
  - regelmäßige Zeitschritte
  - adaptive Verfahren
  - möglichst lang, aber: Stabilität? Authentizität?

# Lösen von Navier-Stokes

## Räuml. Diskretisierung

- durch Quadrigitter
- Geschwindigkeit an den Seitenflächen, Druck im Zentrum des Quaders



# Lösen von Navier-Stokes

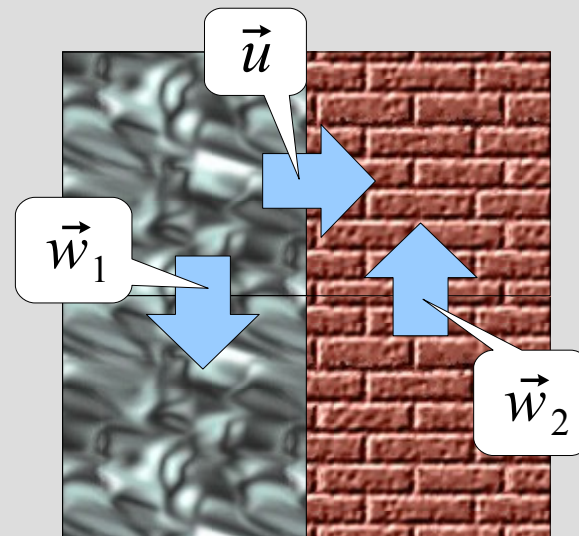
- Randbedingungen

(Details: Foster & Metaxas: „Realistic Animation of Liquids“)

- Modellierung von Fluid- (und Simulations-)grenzen, z.B. Gefäßwand, Zu-/Abfluss, freie Oberfläche

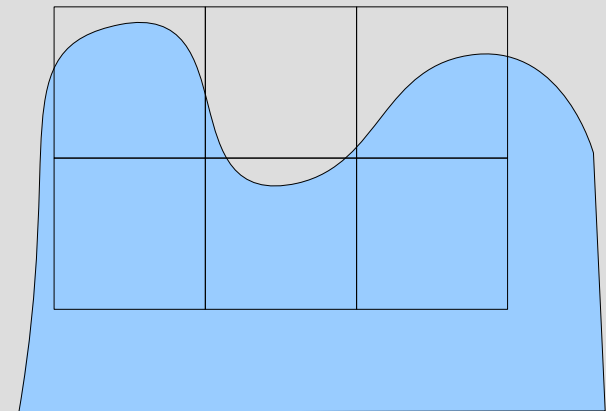
- feste Bedingungen im Strömungsfeld:

- harte Wand:  $\vec{u}=0$  mit  $\vec{u}$  senkrecht auf der Wand
- mit Reibung (no-slip): tangentielle innere Geschwindigkeit entgegen-gesetzt der äußeren  
 $\vec{w}_1 = -\vec{w}_2$



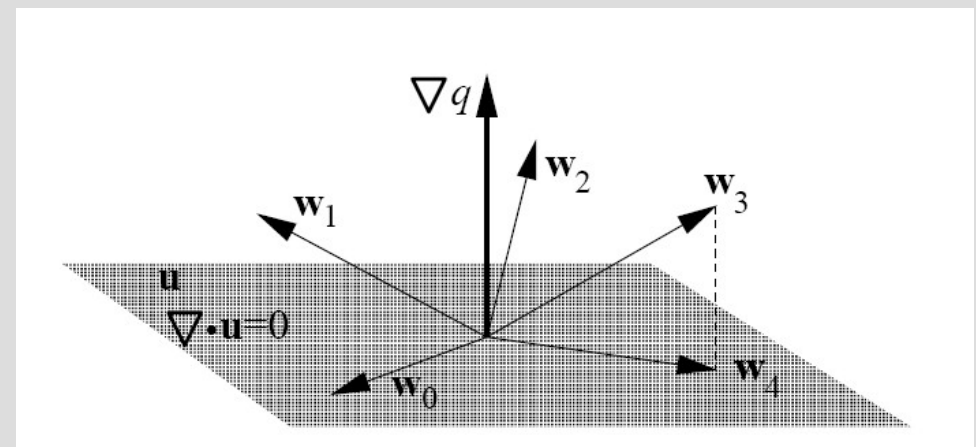
# Lösen von Navier-Stokes

- Bedingungen im Strömungsfeld:
  - Zufluss: feste Geschwindigkeit an allen Flächen
  - Abfluss: Geschwindigkeiten auf die der umgrenzenden Flächen setzen, dann relaxieren im Projektions-schritt
  - freie Oberfläche: keine Divergenz / freie Flächen erhalten gleiche Geschwindigkeiten wie gefüllte gegenüber



# Lösen von Navier-Stokes

- bisher: reibungsfreies Fluid
- wir wollen aber auch: inkompressibel!  
=> Nebenbedingung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$
- Divergenz der Geschwindigkeit verschwindet
  - d.h. alles, was in einen „Punkt“ hineinströmt, muss auch wieder hinaus
- Anwendung der Bedingung:
  - zuerst ignorieren
  - dann erhaltene Lösung zurück projizieren



# Lösen von Navier-Stokes

- Helmholtz-Hodge Dekomposition
  - jedes Vektorfeld  $\vec{w}$  kann eindeutig in folgende Form zerlegt werden:

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{\nabla} q$$

- wobei  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$  (d.h. divergenzfrei) und  $q$  ein Skalarfeld ist

- Operator P

- projiziert jedes Feld  $\vec{w}$  auf seinen divergenzfreien Anteil  $\vec{u}$

$$\vec{u} = P \vec{w}$$

- implizit definiert durch:

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{\nabla} q$$

↓

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{w} = \vec{\nabla}^2 q$$

# Lösung von Navier-Stokes

- Projektionsoperator  $\vec{\nabla} \cdot \vec{w} = \vec{\nabla}^2 q$ 
  - Lösung dieser Poisson-Gleichung liefert  $q$
  - Definition des Operators  $P$  :

$$\vec{u} = P \vec{w} = \vec{w} - \vec{\nabla} q$$

- Anwendung auf die Navier-Stokes Gleichung:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{f} + \frac{\vec{\nabla} \vec{p}}{\rho} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = P \left( -(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{f} \right)$$

(mit  $P \vec{u} = \vec{u}$  und  $P \vec{\nabla} p = 0$  )

# Lösen von Navier Stokes

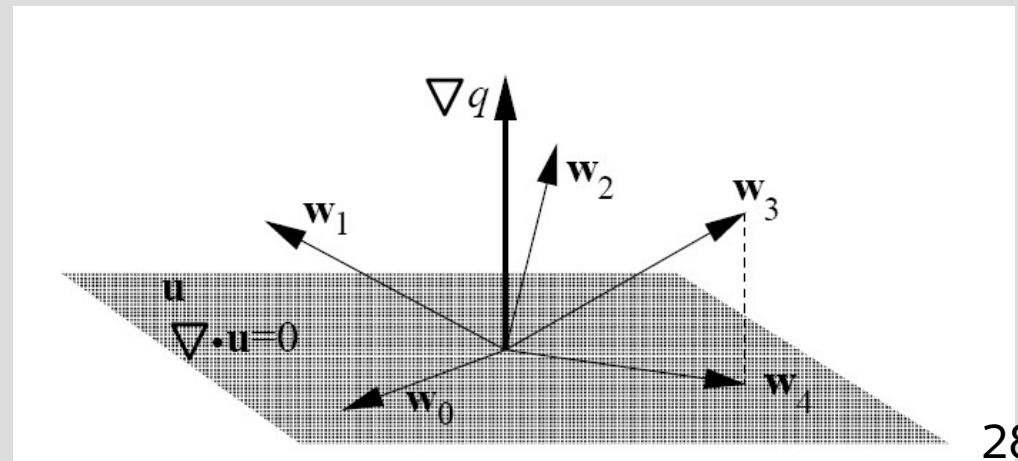
- ausgehend von

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \mathbf{P} \left( -(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{f} \right)$$

- wird die Gleichung in drei Schritten gelöst:
  - Kräfte  $\vec{u}(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{w}_1$
  - Advektion  $\vec{w}_1 \rightarrow \vec{w}_2$
  - (Rück-) Projektion  $\vec{w}_3 := \mathbf{P}(\vec{w}_2)$

- konstanter Zeitschritt  $\Delta t$

$$\vec{u}(\vec{x}, t + \Delta t) := \vec{w}_3$$



# Lösen von Navier-Stokes

- Kräfte
  - Ursprung der Kräfte:
    - Schwerkraft
    - Modellierende Kräfte durch einen Real-Time Animator
    - Auftrieb
  - einfacher expliziter Eulerschritt der Länge  $\Delta t$

$$\vec{w}_1 := \vec{u}(\vec{x}, t) + \Delta t \vec{f}(\vec{x}, t)$$

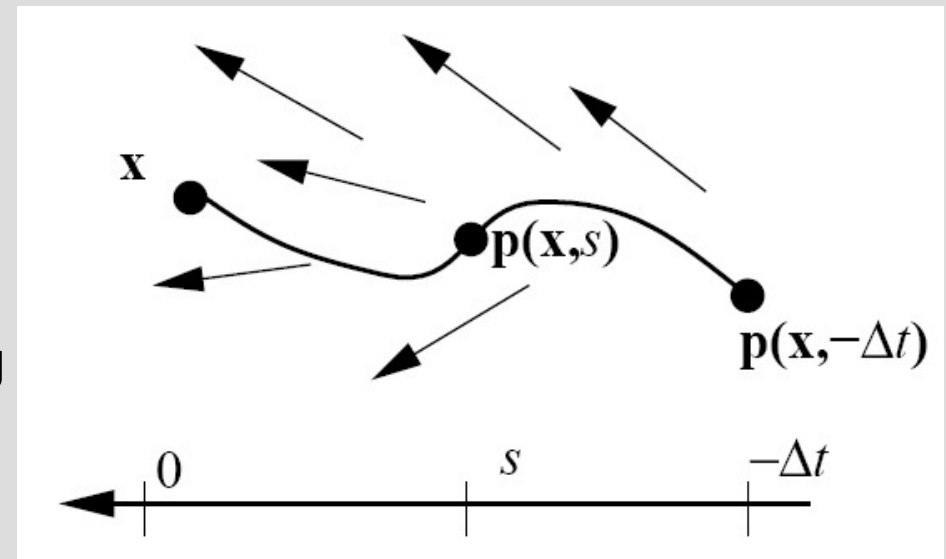
- Annahme konstanter Kräfte über einen Zeitschritt

# Lösen von Navier-Stokes

- Advektion  $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ 
  - Term beschreibt die (nicht-lineare) Ausbreitung von Störungen im Feld
  - Sichtweise eines Partikels: während des Zeitschritts  $\Delta t$  wird das Partikel von  $\vec{x}'$  nach  $\vec{x}$  bewegt, (d.h. auf einer Stromlinie) dabei ändern sich (zuerst nur skalare) Werte des Partikels nicht
  - jetzt einfach die Geschwindigkeit als eine Kombination von drei skalaren Werten betrachten

# Lösen von Navier-Stokes

- Advektion
    - damit ist eine mögliche Lösungsstrategie gegeben: Backtracking
    - Zurückverfolgen in  $\vec{w}_1$  des Partikels von der aktuellen Stelle  $\vec{x}$  über einen Zeitraum von  $\Delta t$
    - mit Standardmethoden, z.B. explizitem Euler mit Subsampling oder Runge-Kutta zum Punkt  $\vec{x}'$
    - Geschwindigkeiten an den Zwischenschritten werden aus den Gitterwerten interpoliert
- => Semi-Lagrange Methode



# Lösen von Navier-Stokes

- Advektion

- die neue Geschwindigkeit wird dann einfach von  $\vec{w}_1(\vec{x}')$  übernommen

$$\vec{w}_2(\vec{x}) := \vec{w}_1(\vec{x}')$$

- dazu einfach trilineare Interpolation der Geschwindigkeiten auf dem Quadrigitter
- lediglich eine „Durchmischung“ der Geschwindigkeit  
-> keine Gefahr, dass Simulation explodiert, unabhängig vom Zeitschritt!
- bedingungslos-stabile Simulation

# Lösen von Navier-Stokes

- Projektion in inkompressiblen Lösungsraum
  - siehe Einführung
  - Benutzung des Operators  $P$
  - dazu Lösen des Gleichungssystems

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{w} = \vec{\nabla}^2 q$$

=> Standardbibliotheken (z.B. Fishpak, preconditioned conjugate-gradient solver)

- Ermittlung des korrigierenden Anteils  $\vec{\nabla} q$

$$\vec{w}_3 = P \vec{w}_2 = \vec{w}_2 - \vec{\nabla} q$$

- Ergebnis: Strömungsfeld für den nächsten Zeitschritt

$$\vec{u}(\vec{x}, t + \Delta t) := \vec{w}_3$$

# 3. Simulation auf hybriden Netzen

(Feldman et al. „Animating Gases with Hybrid Meshes“)

Motivation:

- Randbedingungen
  - trivial, wenn sie an Gittergrenzen gelten
  - > Quaderförmige Gitter schlecht für „schräge Objekte“
- Auswege:
  - feineres Gitter -> hoher Aufwand
  - adaptives Gitter -> komplexer Zusammenschluss
  - trotzdem: feine Rampe  $\neq$  Schräge !!

=> Gitter mit Tetraedern

  - Tetraeder erzeugen höheren Aufwand -> mit Quadrigittern mischen

=> Hybride Gitter

# 3. Simulation auf hybriden Netzen



Hexaeder-Netz



Tetraeder-Netz



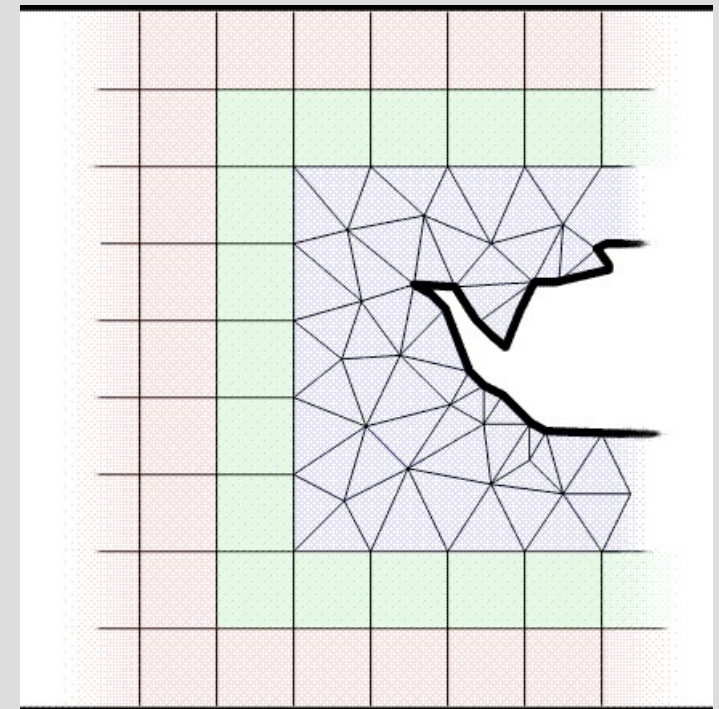
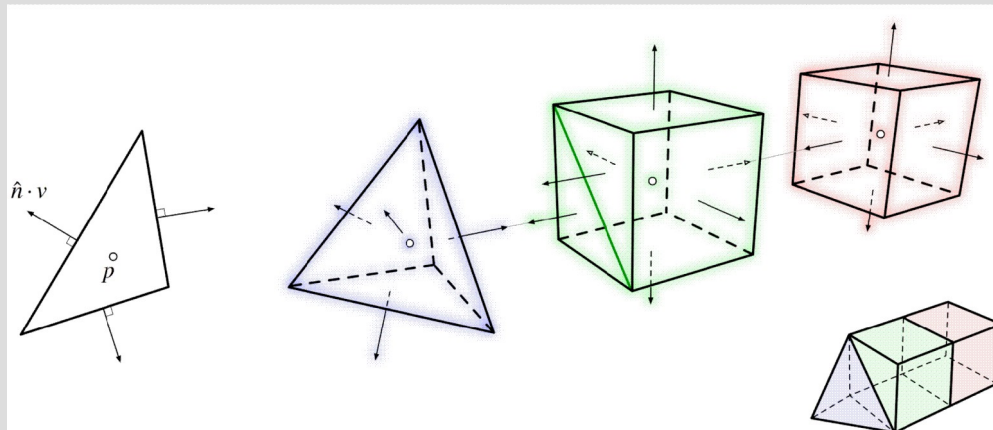
hybrides Netz

# 3. Simulation auf hybriden Netzen

- Verfahren analog zum eben vorgestellten
  - Semi-Lagrange
  - Rückprojektion
  - Geschwindigkeiten an den Flächen, Drücke im Zentrum der Zellen
  - auf dem Quaderteil des Netzes identisches Vorgehen
- Unterschiede
  - Tetraeder
  - Mischzellen, an denen Quader und Tetraeder zusammenstoßen
  - angepasstes Interpolationsverfahren
  - angepasste differentielle Operatoren nabla, div, grad

# 3. Simulation auf hybriden Netzen

- Diskretisierung des Raums
  - achsenparallele Quader (wie bisher)
  - Tetraeder
    - > Verbindungszellen notwendig
  - besondere Behandlung der Transitionszellen im Integrations-schritt



# 3. Simulation auf hybriden Netzen

- Divergenz der Geschwindigkeit
  - benötigt in den Zellmittelpunkten

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right)_j = \frac{1}{V_j} \sum_{face_i \in cell_j} \left(\vec{n}_i \cdot \vec{u}_i\right) A_i$$

- mit  $V_j$  Volumen der Zelle,  $A_i$  Flächeninhalt,  $\vec{n}_i$  Flächennormale
- für Quader identisch zum bisherigen!
- Verbindungszellen: Mittelung der beiden angrenzenden Geschwindigkeiten
- aus Diskretisierung des Divergenz-Theorems

$$\int_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right) dV = \int_S \left(\vec{n} \cdot \vec{u}\right) dS$$

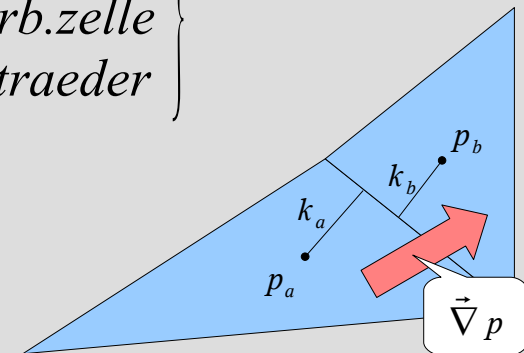
# 3. Simulation auf hybriden Netzen

- Gradient des Drucks
  - benötigt auf den Flächen zwischen Zellen
  - Komponente des Gradients in Richtung der Flächennormalen benötigt

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} p$$

- Differenz des Drucks der einzelnen Zellen, dividiert durch den Abstand der Mittelpunkte, gemessen senkrecht zur Fläche

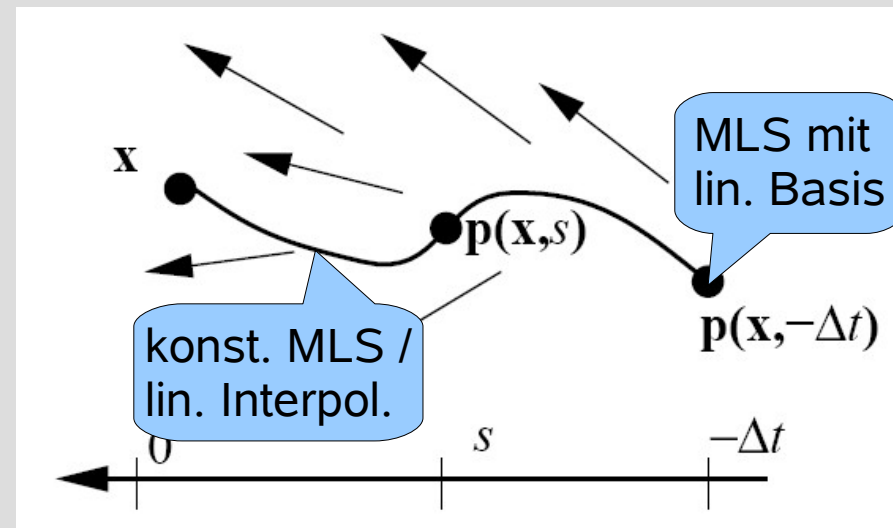
$$\left( \vec{n} \cdot \vec{\nabla} p \right)_i = \frac{p_b - p_a}{k_b + k_a} \quad k_j = \begin{cases} 1/2h, & j \text{ Hexagonal} \\ 1/2h, & j \text{ Verb.zelle} \\ 3V_j/4A_i, & j \text{ Tetraeder} \end{cases}$$



# 3. Simulation auf hybriden Netzen

- Interpolation

- benötigt im Semi-Lagrange Schritt, um  $\vec{u}(\vec{x}')$  zu bestimmen
- Quader: tri-linear
- Tetraeder / Verbindungszellen: je nach Verwendungszweck
- für  $\vec{u}(\vec{x}')$ :
  - moving least squares mit linearen Basisfunktionen
- Partikel bewegen und Rückwärts-Schritte in Semi-Lagrange:
  - moving least squares mit konstanten Basisfunktionen an den Eckpunkten
  - danach lineare Interpolation auf den Tetraedern



# 3. Simulation auf hybriden Netzen

- Moving least-squares Interpolation  
(Details: Belytschko et al., „Meshless...“)
  - „Lösung“ eines überbestimmten, gewichteten Gleichungssystems
  - Bestimmung der nahsten möglichen Lösung (-> Least Squares, Projektion)

$$\begin{pmatrix} \vec{n}_1^T \\ \vec{n}_2^T \\ \vdots \\ \vec{n}_k^T \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} (\vec{n} \cdot \vec{u})_1 \\ (\vec{n} \cdot \vec{u})_2 \\ \vdots \\ (\vec{n} \cdot \vec{u})_k \end{pmatrix}$$

kurz:  $N\vec{u} = \vec{z}$

# 3. Simulation auf hybriden Netzen

- Moving least-squares Interpolation

- Wichtung je nach Nähe zum aktuellen Punkt durch  $W(\vec{x})$

wobei:  $w_{ii}(\vec{x}) = \frac{1}{r_i^2 + \epsilon^2}$

mit  $r_i$  Entfernung zwischen  $\vec{x}$  und dem Flächenmittelpunkt

- dann „lösen“ von

$$W(\vec{x}) N \vec{u} = W(\vec{x}) \vec{z}$$

- $\vec{u}$  ist dann die gesuchte Geschwindigkeit
- MLS mit linearen Basisfunktionen: analog, aber erweitertes N, damit mehr Aufwand und genauere Lösung

# 3. Simulation auf hybriden Netzen

- Epsilon:
  - kontrolliert die Stärke des Weichzeichnens, (Einfluss entfernt liegender Geschwindigkeiten)
  - empirisch:  $0.003 \cdot$  der durchschnittl. Kantenlänge der Zelle, in der  $\vec{x}$  liegt ....
- Anwendung:
  - Bestimmung der Geschwindigkeiten an allen Eckpunkten im Gitter, nur über angrenzende Flächen wird gefittet mit MLS auf konstanten Basisfunktionen
  - Rückwärtsschritte im Semi-Lagrange nun mit linear interpolierten Werten der Eckpunkte
  - wenn  $\vec{x}'$  gefunden: fit mit MLS auf einer zwei Ring-Nachbarschaft um  $\vec{x}'$

# 3. Simulation auf hybriden Netzen

- Visualisierung:
  - einfach: Partikeladvektion
    - Partikel mit der Geschwindigkeit im Feld mitbewegen
    - direkt rendern
  - mittel: Texturen aus Dichteschnitten
    - Schnitte auf Tiefenebene
    - Darstellung als transparente Texturen
  - komplex: Shading über Streuungswahrscheinlichkeiten
    - Dichte bestimmen, komplexes Modell zwischen Dichte <-> Helligkeit
    - Eigenschattierungen etc.

# 3. Simulation auf hybriden Netzen



# 3. Simulation auf hybriden Netzen



# 3. Simulation auf hybriden Netzen



# 3. Simulation auf hybriden Netzen

- Resultate
  - Videos...
- Kürzungen / Adaptionen
  - Methode nach Stam:
    - Geschwindigkeiten in der Mitte der Quader
    - Viskositätsterm in Navier-Stokes Gleichung
  - Methode nach Feldman et al.:
    - nur Geschwindigkeitsnormalen auf den Flächen
  - insgesamt festzustellen: Einheiten, physikalische Hintergründe, viel Empirik, Auswahl der Interpolationsverfahren
  - Visualisierung