

Animation und Rendering von komplexen Wasseroberflächen



Hauptseminar

René Lützner

Übersicht

1. Einleitung
2. Navier-Stokes Gleichungen
3. Lagrangesche und Eulersche Darstellung
4. MAC Gitter
5. Level-Set
6. Fehlerkorrektur
7. Vergleich
8. Geschwindigkeiten auf der Oberfläche
9. Ergebnisse

Bildverzeichnis
Quellen

1 Einleitung

Anforderungen:

- numerische Methoden, die das Verhalten von Wasser bei unterschiedlichen Bedingungen beschreiben
- Möglichkeiten zur Einflussnahme auf die globale Bewegung des Fluids

Ziel:

- photorealistische Darstellung von komplexen Wasseroberflächen



Bild 1 animierter Charakter der mit viskosen Schlamm interagiert (Shrek)

2 Navier-Stokes-Gleichungen

- Grundgleichungen der Strömungsmechanik für newtonsche Fluide
- ein aus nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung bestehende Modell
- beruht auf physikalischen Erhaltungssätzen (Zweites Newtonsches Gesetz $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$)

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + (\lambda + \eta) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f}.$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + (\lambda + \eta) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f}.$$

\mathbf{v} Geschwindigkeit ρ Dichte

\mathbf{f} Volumenkraftdichte p Druck

2 Navier-Stokes-Gleichungen

- da hier Wasseroberflächen betrachtet werden, kann die Impulsgleichung vereinfacht werden

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}.$$

ν kinematische Viskosität

p Quotient aus Druck und Dichte

- bei zusätzlicher Vernachlässigung von Temperatureinflüssen ergibt sich als einzige zusätzliche Bedingung die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

3 Lagrangesche und Eulersche Darstellung

Lagrange

- Partikel wird mit seinem lokalen Koordinatensystem entlang einer Strömungslinie von der Fluidströmung mitbewegt
- die Bewegung eines Fluidpartikels wird in Abhängigkeit von seiner aktuellen Position und der Zeit betrachtet

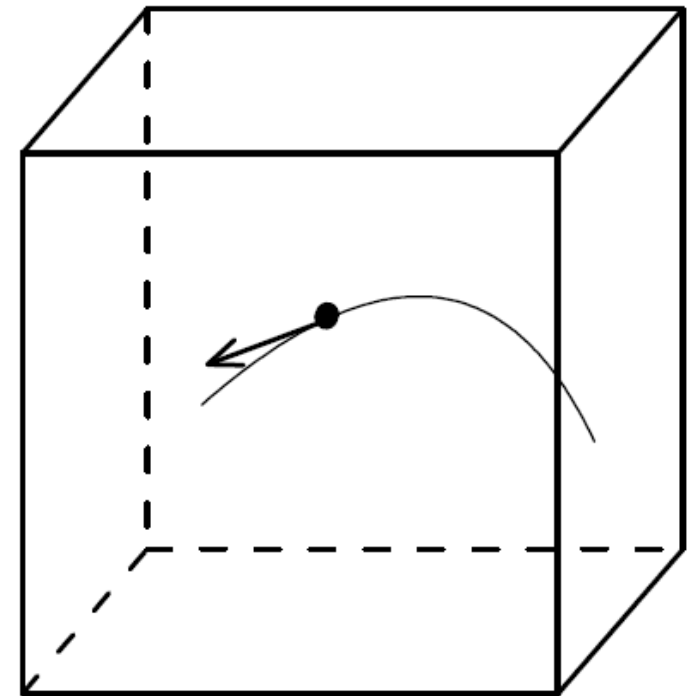


Bild 2 Lagrange'sche Sichtweise

3 Lagrangesche und Eulersche Darstellung

Euler

- Kontrollvolumen V , das um einen festen Punkt X im Raum zentriert ist
- im Kontrollvolumen V betrachtet man die Strömungsgeschwindigkeit $v(X, t)$ und andere Fluidparameter, wie den Druck $p(X, t)$ oder die Dichte $\rho(X, t)$, die sich in Abhängigkeit von der Zeit verändern

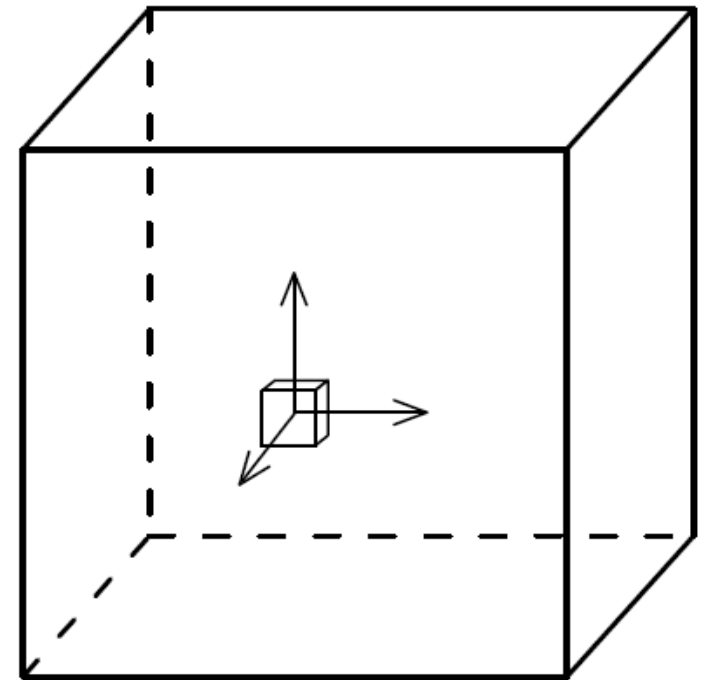


Bild 3 Euler'sche Sichtweise

4 MAC-Gitter

- MAC (Marker and Cell Method) Gitter basiert auf einem festen eulerschen Gitter
- Position des Fluids wird durch sogenannte Marker-Partikel bestimmt
- zerlegt den zu berechnenden Bereich in einzelne Zellen, welche jede für sich im Zentrum eine Variable für den Druck halten und sich mit den angrenzenden Nachbarzellen eine Geschwindigkeitsvariable teilen

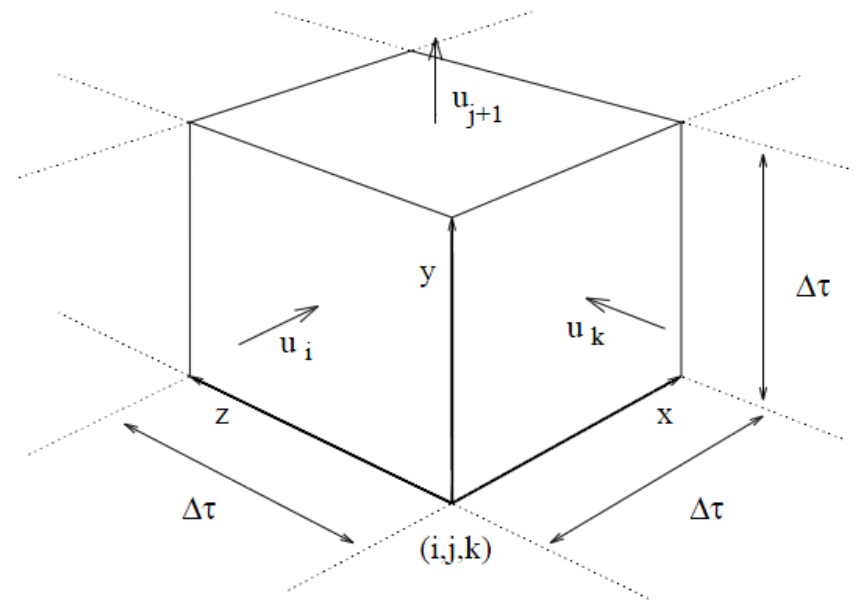


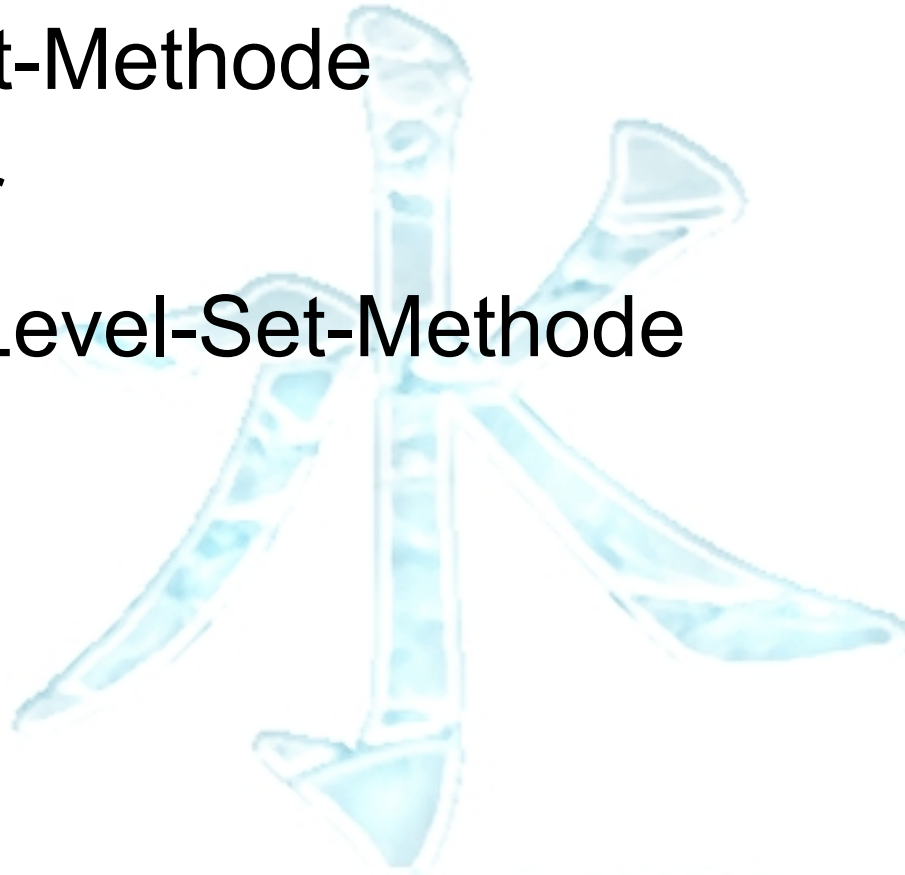
Bild 4 einzelne Gitterzelle auf der drei von sechs Geschwindigkeiten dargestellt sind

5 Level-Set

5.1 Level-Set-Methode

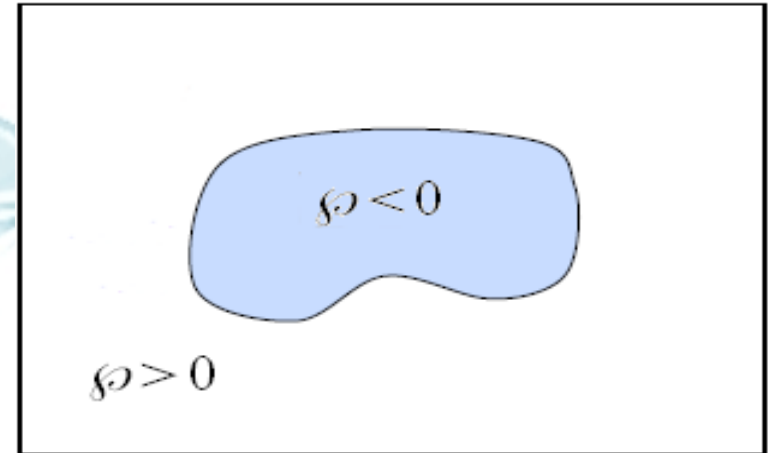
5.2 Isokontur

5.3 Partikel-Level-Set-Methode



5.1 Level-Set-Methode

- mathematisches Verfahren um geometrische Objekte und deren Bewegung numerisch zu berechnen
- Fkt. die für Punkte außerhalb des Fluids größer und innerhalb kleiner Null ist



Vorteile:

- Kurven und Oberflächen können auf einem räumlich festen (Eulerschen) Koordinatensystem berechnet werden
- glatte Oberflächen

Hamilton-Jakobi-Gleichung

Nachteil:

- Masseverlust bei Krümmung der Wasseroberfläche

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\vec{v} * \nabla \phi$$

5.2 Isokontur

- hybriden Ansatz aus Level-Set und Partikelsystem (Fedkiw und Foster)
- die Oberfläche wird durch die Isokontur einer impliziten Funktion generiert
- jeder Partikel repräsentiert dann den Mittelpunkt eines implizit definierten Körpers

$$\phi_p = \sqrt{(x_i - x_{pi})^2 + (x_j - x_{pj})^2 + (x_k - x_{pk})^2} - r$$

r Radius

x_p Partikel-Mittelpunkt



Bild 5 Glättung der Isokontur, die sich durch die impliziten Oberflächen der Partikel ergibt

5.3 Partikel-Level-Set

- zwei Arten von Partikeln, abhängig davon ob diese sich in der $\phi \leq 0$ oder in $\phi > 0$ Region befinden, sind es negative oder positive Partikel
- Partikel besitzen auch hier eine, über eine implizite Fkt. definierte Oberfläche, doch für den Radius existiert ein Minimal- und Maximalwert
- der Radius wird so angepasst, dass die Tangente der Kugeloberfläche sich möglichst auf der Wasseroberfläche befindet

$$r_p = \begin{cases} r_{max} & \text{if } s_p \phi(\vec{x}_p) > r_{max} \\ s_p \phi(\vec{x}_p) & \text{if } r_{min} \leq s_p \phi(\vec{x}_p) \leq r_{max} \\ r_{min} & \text{if } s_p \phi(\vec{x}_p) < r_{min} \end{cases}$$

ϕ Implizite Oberfläche
 s_p Vorzeichen (Partikel)

6 Fehlerkorrektur

- 6.1 Fehlerkorrektur anhand der Krümmung
- 6.2 Fehlerkorrektur bei Impliziter Oberfläche
- 6.3 Particle Reseeding
- 6.4 Alternative Methoden

6.1 Fehlerkorrektur anhand der Krümmung

- Partikel die sich mehrere Gitterzellen entfernt von der Oberfläche und innerhalb des Fluids befinden werden gelöscht
=> erhöht Effizienz

- zur Fehler-Erkennung wird die lokale Krümmung der Schnittstelle zur Luft interpoliert

$$k = \nabla * (\nabla \phi | \nabla \phi |)$$

k Krümmung ϕ implizite Oberfläche

- glatte Bereiche weisen eine geringe Krümmung auf und eine hohe Krümmung deutet auf Verwirbelungen und Wasserspritzer hin

6.2 Fehlerkorrektur bei impliziten Flächen

- die Marker-Partikel und die implizite Funktion werden separat vorwärts integriert

implizite Funktion: $\varphi_t + \vec{u} * \nabla \varphi = 0$

Partikel: $d\vec{x}_p / dt = \vec{u}_p$

φ_t part. Ableitung der implizite Oberfläche \vec{u} Geschwindigkeit

\vec{u}_p Partikel-Geschwindigkeit

- Partikel die um mehr als ihren Radius verschoben auf der falschen Oberflächenseite sich befinden, sind ein Indiz für Fehler
- positive Partikel werden dazu benutzt um die $\varphi > 0$ und negative um die $\varphi \leq 0$ Region wieder herzustellen

$$\varphi_p(\vec{x}) = s_p (r_p - |\vec{x} - \vec{x}_p|)$$

6.3 Particle Reseeding

- sorgt für das zufällig Erneuern bzw. Auffüllen von Partikel
- Partikel werden in der Nähe der Schnittstelle (zwischen Wasser und Luft) platziert
- Zuordnung erfolgt mit Hilfe der geometrischen Informationen, der impliziten Funktion

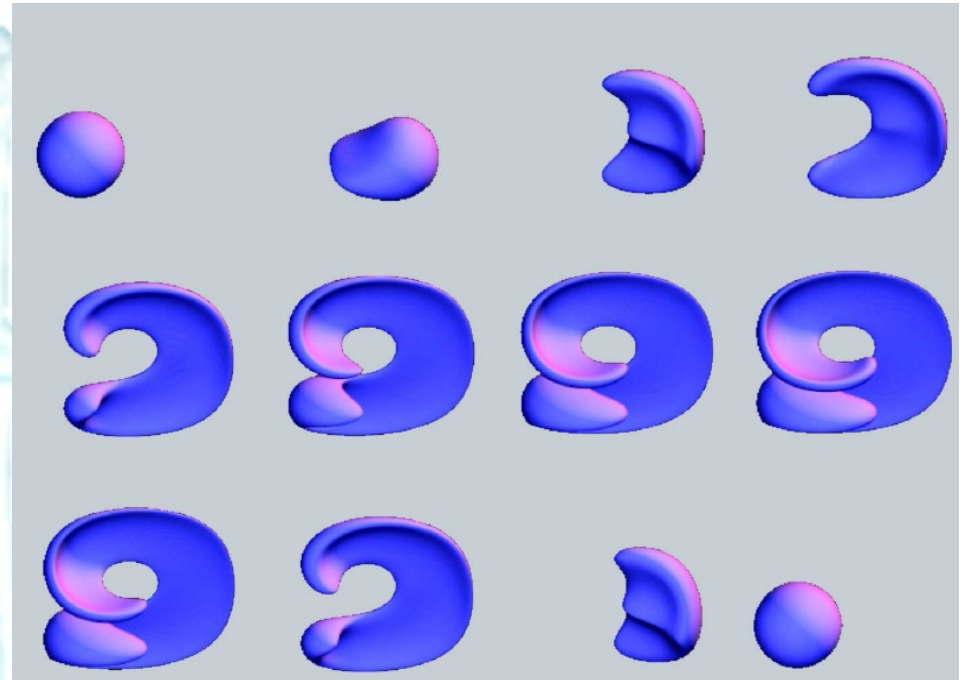


Bild 6 *Enright-Test*

- Ziel: Erhalt einer bestimmten Mindestmenge an Partikeln pro Zelle und damit Ausgleich des Masseverlustes

6.4 Alternative Methoden

Volume of Fluid

- VOF (von Hirt und Nicholas 1981) sorgt zwar für eine Erhaltung des Volumens, jedoch produziert dieses auch Artefakte vorallem bei dünnen Wasserflächen

Konnektivitätslisten

- explizites Diskretisieren der Oberfläche mit Partikeln und Verwendung sogenannte Konnektivitätslisten (Unverdi und Tryggvason 1992)
- doch schwer zu handhaben, wenn Teile der Oberfläche ausbrechen und wieder zusammenfließen.

7 Vergleich

- (a) eingekerbte Disk, die um den Punkt (50,50) gedreht wird
- (b) implizite Oberfläche ohne Partikel
- (c) implizite Oberfläche mit Partikel (Foster und Fedkiw 2001)
- (d) Ansatz von Enright, Marschner und Fedkiw mit Partikeln auf beiden Seiten

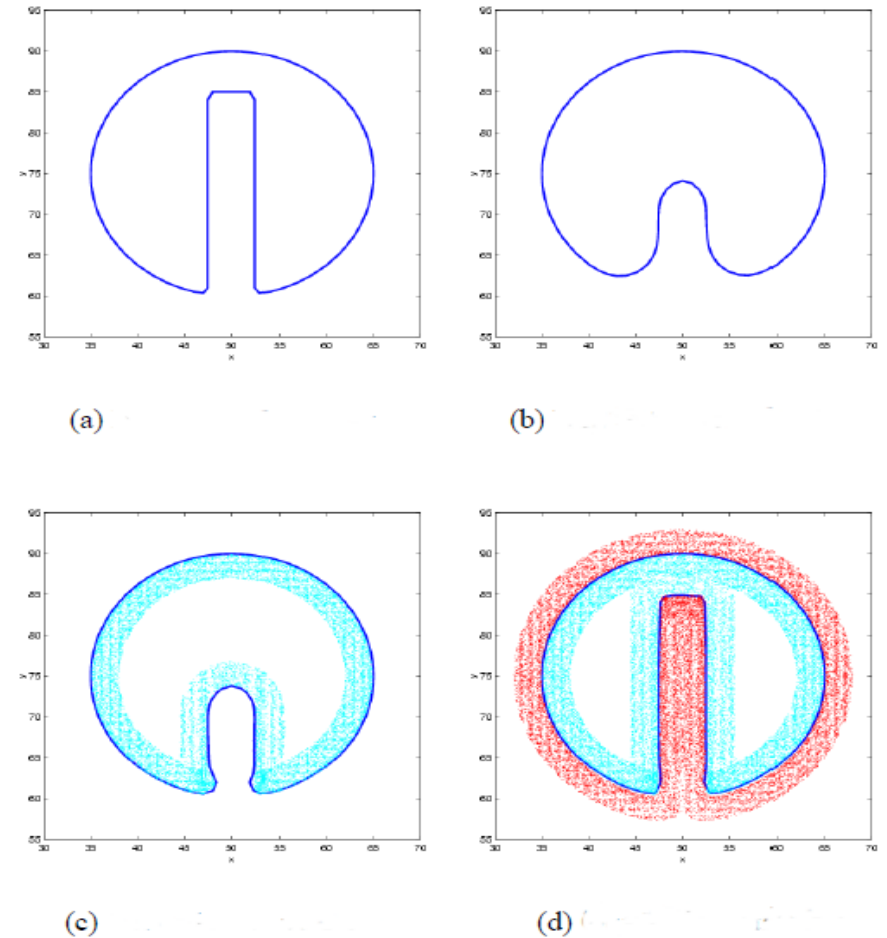


Bild 7 Vergleich

7 Vergleich

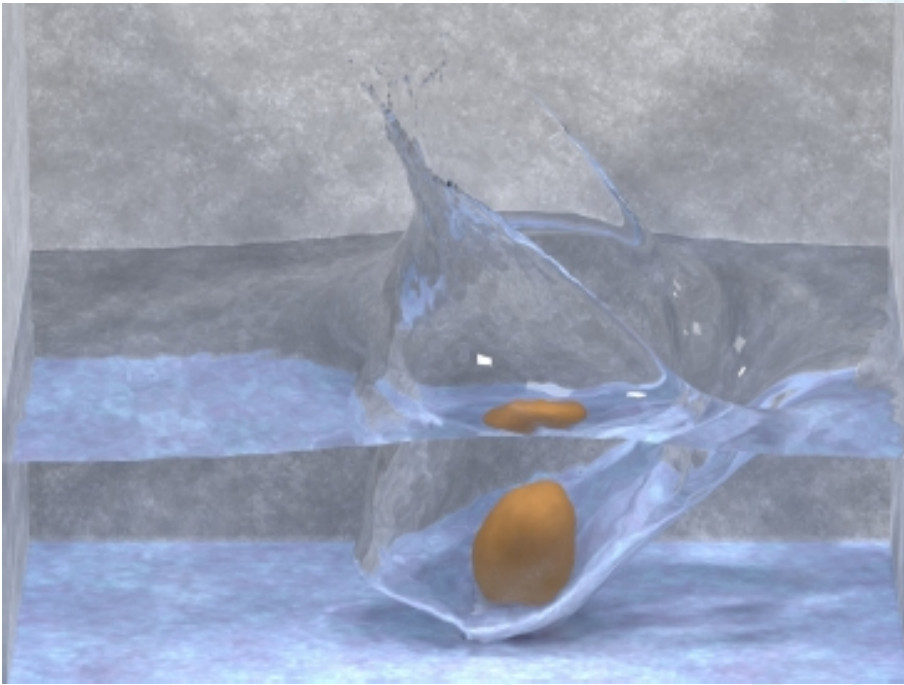


Bild 8 Enright, Marschner und Fedkiw (140x110x90)

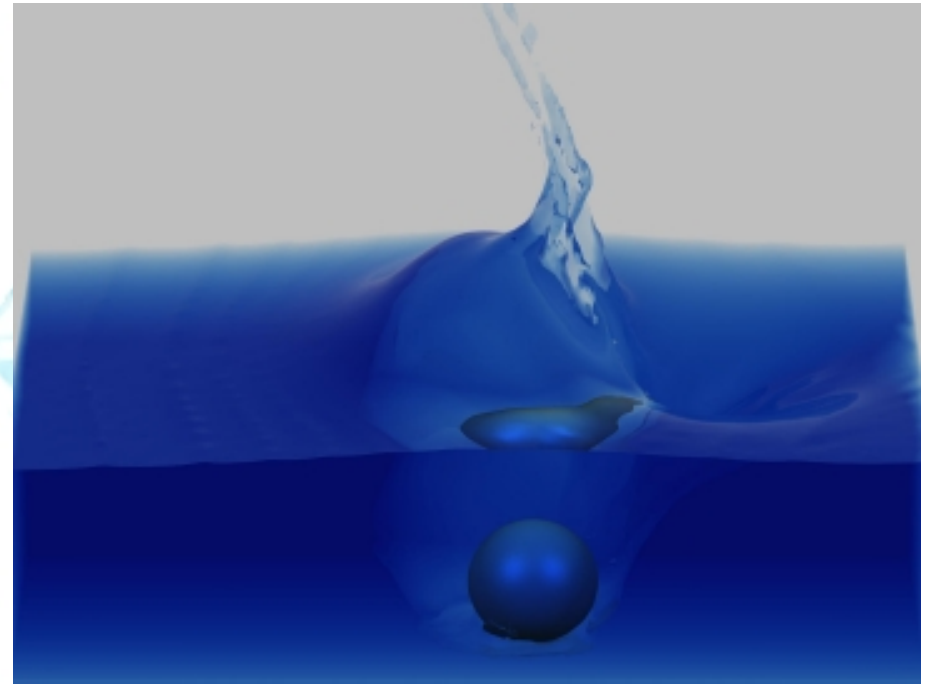


Bild 9 Foster und Fedkiw 2001 (140x110x90)

8 Geschwindigkeiten auf der Oberfläche

- Geschwindigkeiten auf jenen Zellflächen die sich direkt an der Oberfläche zwischen Luft und Wasserzellen befinden, müssen gesondert ermittelt werden
- Nutzung einer Extrapolations-Methode um die Geschwindigkeiten über die Wasseroberfläche hinaus, zu berechnen

Extrapolations-Methode für die x Komponente der Geschwindigkeit:

$$\frac{\partial u}{\partial T} = -\vec{N} * \nabla u$$

T fiktive Zeit u Geschwindigkeit (x Komponente)
 \vec{N} Normale

$$\vec{u} = (u, v, w) \quad \vec{N} = (n_x, n_y, n_z) \quad \vec{N} = \nabla \phi / |\nabla \phi| \quad \nabla \phi * \nabla u = 0$$

8.1 Kontrollmöglichkeiten

- die für die Bewegung der Wasseroberfläche genutzte Extrapolations-Methode ermöglicht eine neue Variante der Wasseroberflächen-Steuerung
- die folgende Gleichung kann auf die gesamte Oberfläche oder aber auch nur auf einen bestimmten Teil angewendet werden

$$\vec{u} = (1 - a) \vec{u}_{ext} + a \vec{u}_{wind}$$

\vec{u}_{ext} extrapolierte Geschwindigkeit

\vec{u}_{wind} Wind Geschwindigkeit

a Mix-Konstante

8.2 Ablauf

1. Extrapolation der Geschwindigkeiten über die Oberfläche hinaus und eventuell Modifikation dieser (Kontrolle)
2. Vorwärts-Integrieren der Wasser Oberfläche, sowie der Marker-Partikel und anschließender Korrektur
3. Lösen der Navier-Stokes-Gleichung für die neuen Werte, Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes sicherstellen

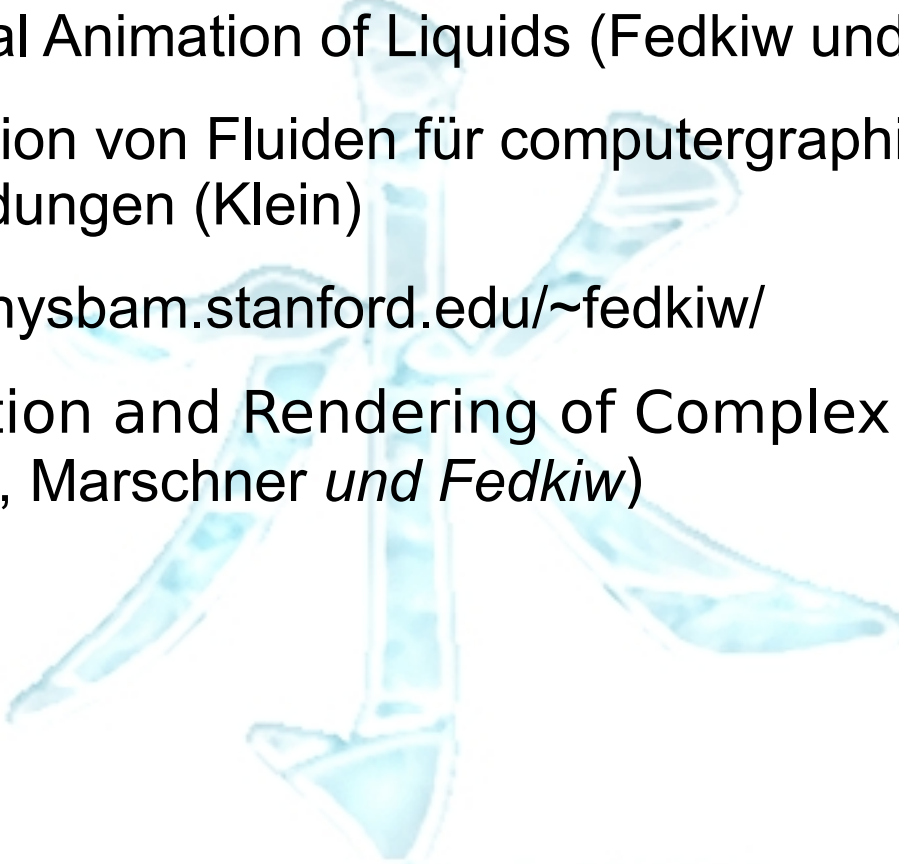
9 Ergebnisse



9.1 Zusammenfassung

- Die von Enright, Marschner und Fedkiw vorgestellte „verdickten“ Oberfläche stellt eine Verbesserung zu den bis dahin genutzten Methoden, hinsichtlich der damit erzielten Ergebnisse dar
- In zukünftigen Arbeiten soll die Wasseroberfläche zusätzlich noch mit einer Textur belegt werden
- Jedoch sind die vorgestellten Simulationsverfahren momentan mit Berechnungszeiten von mehreren Minuten nicht echtzeitfähig
- Oberflächenspannung von Wasser wurde nicht beachtet
- Einschluss von Luft im Fluid nicht möglich und somit auch keine Luftblasen

Bildverzeichnis

- 
- [1] [4] [5] Practical Animation of Liquids (Fedkiw und Foster)
- [2] [3] Simulation von Fluiden für computergraphische Anwendungen (Klein)
- [6] <http://physbam.stanford.edu/~fedkiw/>
- [7] [8] [9] Animation and Rendering of Complex Water Surfaces (Enright, Marschner *und* Fedkiw)

Quellen

- Practical Animation of Liquids (Fedkiw und Foster)
- Animation and Rendering of Complex Water Surfaces (Enright, Marschner *und* Fedkiw)
- A Study on Particle Level Sets and Navier Stokes Solver for Water Simulations (Balci und Fidaner)
- Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces (S. J. Osher, R. Fedkiw)
- An introduction to fluid mechanics (George Keith Batchelor)
- http://ifgivor.unimuenster.de/vorlesungen/Num_Modellierung/Populat_Modelle/RungeKutta.html
- <http://klimt.iwr.uni-heidelberg.de/Projects/paper/doktor/node6.html>