Definition 2.3 (Akzeptierte Sprache eines DFA). Sei $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA. Die von $\mathcal{M}$ akzeptierte Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ ist die Menge aller Wörter $w \in \Sigma^*$, für die der zugehörige Lauf akzeptierend ist. Wir verwenden naheliegende Sprechweisen wie "$\mathcal{M}$ ist ein DFA für die Sprache L", falls $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = L$. ■

Definition 2.4 (Erweiterte Übergangsfunktion eines DFA). Sei $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA. Wir erweitern δ zu einer (ebenfalls mit δ bezeichneten) partiellen Abbildung

$$\delta : Q \times \Sigma^* \to Q.$$

Die Definition von $\delta(q, w)$ für $q \in Q$ und $w \in \Sigma^*$ erfolgt durch Induktion nach der Länge von w. Im Induktionsanfang ist das leere Wort zu betrachten:

$$\delta(q, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} q$$

Für Wörter $w = a$ der Länge 1 (also Wörtern, die aus einem einzelnen Zeichen in $a \in \Sigma$ bestehen) ist $\delta(q, w)$ bereits definiert. Wir nehmen nun an, dass $w = ax$, wobei $a \in \Sigma$ und x ein Wort der Länge $\geqslant 1$ über Σ ist, so dass $\delta(p, x)$ für alle Zustände p bereits definiert ist. Die Definition von $\delta(q, ax)$ ist dann wie folgt:

$$\delta(q, ax) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \delta(\ \delta(q, a),\ x\ ) & : \text{ falls } \delta(q, a) \neq \perp \\ \perp & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Ist $\delta(q, w) = p \in Q$, so schreiben wir auch $q \xrightarrow{w} p$. ■

Ist also $q_0\, q_1 \ldots q_n \in Q^*$ der Lauf von $\mathcal{M}$ für das Wort $w = a_1\, a_2 \ldots a_n$, so ist $\delta(q_0, w) = q_n$. Kann das Wort $w = a_1\, a_2 \ldots a_n$ nicht vollständig gelesen werden (d.h., der Lauf für w in $\mathcal{M}$ hat die Form $q_0 \ldots q_m$, wobei $m < n$ und $\delta(q_m, a_{m+1}) = \perp$), so ist $\delta(q_0, w) = \perp$. Für die von einem DFA $\mathcal{M}$ akzeptierte Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ gilt also:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{M}) &= \big\{ w \in \Sigma^* : \text{der Lauf für } w \text{ in } \mathcal{M} \text{ ist akzeptierend} \big\} \\ &= \big\{ w \in \Sigma^* : \delta(q_0, w) \in F \big\} \end{aligned}$$

Beispiel 2.5 (Akzeptierte Sprache). Die akzeptierte Sprache des DFA $\mathcal{M}$ aus Abbildung 6 ist $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = L^* K$, wobei

$$L = \big\{ 0^n 1 : n \geqslant 1 \big\} \quad \text{und} \quad K = \big\{ 10^n : n \geqslant 0 \big\}.$$

Zunächst machen wir uns klar, dass tatsächlich alle Wörter in $L^* K$ von $\mathcal{M}$ akzeptiert werden, also dass $L^* K \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{M})$. Alle Wörter $0^n 1 \in L$ haben einen Lauf der Form $q_0\, q_1\, q_1 \ldots q_1\, q_0$. Für die Wörter $x = x_1\, x_2 \ldots x_k \in L^*$ mit $x_1, \ldots, x_k \in L$ gilt daher:

$$q_0 \xrightarrow{x_1} q_1 \xrightarrow{x_2} \ldots \xrightarrow{x_{k-1}} q_1 \xrightarrow{x_k} q_0$$

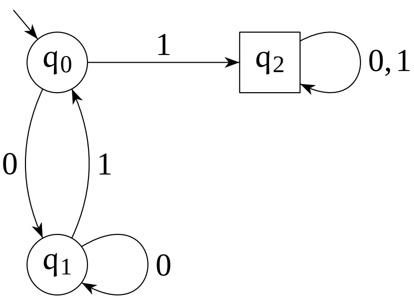
und somit $\delta(q_0, x) = q_0$. Die Läufe der Wörter $y = 10^m \in K$ haben die Form $q_0\, q_2\, q_2 \ldots q_2$. Für alle Wörter $w = xy$ mit $x \in L^*$ und $y \in K$ gilt daher

$$\delta\big(q_0, w\big) = \delta\big(q_0, xy\big) = \delta\big(\delta(q_0, x), y\big) = \delta(q_0, y) = q_2 \in F$$

und somit $w \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$. Es bleibt zu zeigen, dass alle von $\mathcal{M}$ akzeptierten Wörter in $L^* K$ liegen, also dass $\mathcal{L}(\mathcal{M}) \subseteq L^* K$. Aufgrund der topologischen Struktur von $\mathcal{M}$ ist klar, dass alle akzeptierten Wörter w die Form $w = xy$ haben müssen, wobei

$$q_0 \xrightarrow{x} q_0 \xrightarrow{y} q_2,$$

und x so gewählt ist, dass $\delta(q_0, x)$ der letzte in $\mathcal{M}$ besuchte Zustand q_0 ist. Dann aber muss x die Form $0^{n_1}1\,0^{n_2}1\ldots0^{n_k}1$ haben, wobei $n_1, \ldots, n_k \geqslant 1$ und $k \geqslant 0$ (also in L^* liegen), und y mit einer 1 beginnen, gefolgt von beliebig vielen Nullen (also in K liegen). Es folgt $w \in L^* K$.



Wir betrachten nun den DFA $\mathcal{M}'$ im Bild oben, der sich von dem DFA $\mathcal{M}$ aus Abbildung 6 nur durch eine zusätzliche Schleife für das Terminalzeichen 1 an Zustand q_2 unterscheidet. Die akzeptierte Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{M}')$ ist die Menge aller Wörter über dem Alphabet $\{0, 1\}$, die entweder mit einer 1 beginnen oder das Teilwort 011 enthalten. Dies ist die Menge aller Wörter in der Sprache $L^* K'$, wobei L wie oben definiert ist und

$$K' \;=\; \big\{\,1z : z \in \{0,1\}^*\,\big\}.$$

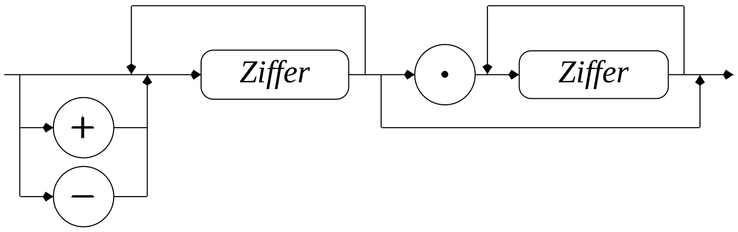
Offenbar haben alle Wörter, die mit einer 1 beginnen, einen akzeptierenden Lauf der Form $q_0\, q_2 \ldots q_2$. Betrachten wir nun ein Wort w, das mit einer 0 beginnt und das Teilwort 011 enthält. Jedes solche Wort w kann zerlegt werden in $w = u011v$, wobei v ein beliebiges Wort über $\{0, 1\}$ ist und das Präfix u entweder leer ist oder mit einer 0 beginnt und die Eigenschaft besitzt, dass vor jeder 1 eine 0 steht. Für jedes solche Wort gilt:

$$q_0 \xrightarrow{u} p \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{1} q_0 \xrightarrow{1} q_2 \xrightarrow{v} q_2$$

Zustand p ist dabei entweder gleich q_1 (falls u mit einer 0 endet) oder gleich q_0 (falls $u = \varepsilon$ oder u mit einer 1 endet). Wir erhalten $\delta(q_0, w) = q_2 \in F$ und somit $w \in \mathcal{L}(\mathcal{M}')$.

Sei nun w ein von $\mathcal{M}'$ akzeptiertes Wort. Da q_0 nicht final ist, ist $w \neq \varepsilon$. Falls w mit einer 1 beginnt, liegt w in K' und somit in $L^* K'$. Falls $w = 0v \in \mathcal{L}(\mathcal{M}')$, dann muss der (akzeptierende) Lauf für w die Gestalt $q_0\, q_1 \ldots q_2$ haben. Nach q_1 führen jedoch nur 0-Kanten und die einzige Möglichkeit q_2 von q_1 zu erreichen, sind die beiden 1-Kanten von q_1 nach q_0 und von q_0 nach q_2. Daher muss w das Teilwort 011 enthalten. ■

Beispiel 2.6 (DFA für Dezimalzahlen). Folgende Abbildung zeigt das Syntaxdiagramm für Dezimalzahlen mit optionalem Vorzeichen $+$ oder $-$, einer Ziffernfolge und einem optionalen Nachkommateil. Zur Vereinfachung schreiben wir kurz *Ziffer* um eine beliebige Ziffer $0, 1, \ldots, 9$ zu bezeichnen. Das zugrundeliegende Alphabet Σ besteht also aus allen Ziffern, den Vorzeichen $+$ und $-$ sowie einem Punkt $\bullet$, der den Vor- vom Nachkommateil trennt, also $\Sigma = \{+,-,\bullet,0,1,\ldots,9\}$.[2]



Ein DFA über Σ, dessen akzeptierte Sprache mit der Menge aller aus dem Syntaxdiagramm herleitbaren Dezimalzahlen übereinstimmt, ist in Abbildung 7 skizziert.

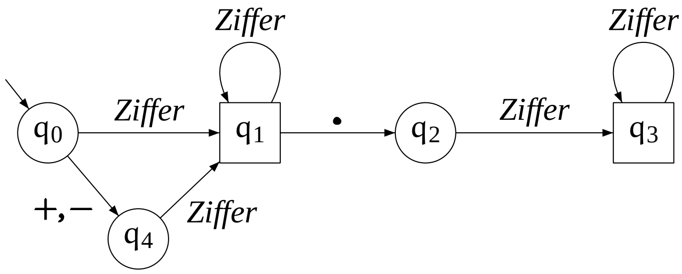


Figure 7: DFA für Dezimalzahlen

Wir betrachten das Eingabewort $w = +78\bullet2$. Die zeichenweise Bearbeitung von w durch $\mathcal{M}$ wird durch folgende Gleichungen anhand der erweiterten Übergangsfunktion formalisiert:

$$\delta(q_0, +78\bullet2) \;=\; \delta(q_4, 78\bullet2) \;=\; \delta(q_1, 8\bullet2) \;=\; \delta(q_1, \bullet2) \;=\; \delta(q_2, 2) \;=\; q_3$$

Der zu $w = +78\bullet2$ gehörende Lauf ist also die Zustandsfolge $q_0\,q_4\,q_1\,q_1\,q_2\,q_3$. Da q_3 ein Endzustand ist, wird das Wort $+78\bullet2$ akzeptiert. Entsprechend ist

$$\delta(q_0, 78+9) \;=\; \delta(q_1, 8+9) \;=\; \delta(q_1, +9) \;=\; \bot$$

für den DFA aus Abbildung 7. Das Wort $78+9$ wird also verworfen, da das letzte Zeichen (die Ziffer 9) nicht gelesen werden kann. Der zugehörige Lauf ist $q_0\,q_1\,q_1$. Dieser ist verwerfend. ■

Totale Übergangsfunktion. Die Übergangsfunktion δ eines DFA wurde als *partielle* Funktion $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ definiert. Undefiniertheitsstellen sind zunächst zugelassen, jedoch kann jeder DFA in einen totalen DFA $\mathcal{M}_{tot}$ überführt werden, der dasselbe Akzeptanzverhalten wie $\mathcal{M}$ hat. Unter einem totalen DFA verstehen wir einen DFA mit totaler Übergangsfunktion (d.h., ohne Undefiniertheitsstellen). Hierzu müssen wir lediglich $\mathcal{M}$ um einen neuen Zustand p erweitern und für alle "fehlenden" Übergänge eine entsprechende Transition zu Zustand p einfügen. Die präzise Definition des DFA $\mathcal{M}_{tot}$ ist wie folgt. Ist $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA, dessen

[2] Alternativ kann auch *Ziffer* als Symbol des Alphabets angesehen werden, in welchem Fall Σ aus den drei Symbolen $+$, $-$ und $\bullet$ und dem Symbol *Ziffer* besteht. In den unten angegebenen Wörtern sind dann die Dezimalziffern 7, 8 und 2 durch das Symbol *Ziffer* zu ersetzen. Diese Variante wurde in den Folien zur Vorlesung eingesetzt.

Übergangsfunktion mindestens eine Undefiniertheitsstelle hat, so ist der zugehörige totale DFA $\mathcal{M}_{tot}$ wie folgt definiert:

$$\mathcal{M}_{tot} \stackrel{\text{def}}{=} (Q \cup \{p\}, \Sigma, \delta_{tot}, q_0, F),$$

wobei p ein neuer Zustand ist (also nicht in Q liegt) und die Übergangsfunktion δ_{tot} wie folgt definiert ist:

$$\delta_{tot}(q, a) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \delta(q, a) & : \text{ falls } q \in Q \text{ und } \delta(q, a) \neq \bot \\ p & : \text{ sonst} \end{cases}$$

Dabei ist $q \in Q \cup \{p\}$ und $a \in \Sigma$. Insbesondere enthält $\mathcal{M}_{tot}$ die Schleifen $p \xrightarrow{a} p$ für alle $a \in \Sigma$. D.h., sobald Zustand p betreten wird, kann dieser niemals mehr verlassen werden. Man spricht daher auch von einem *Fangzustand*. Da der neue Fangzustand p kein Akzeptanzzustand ist, sind alle Läufe, die in p enden, verwerfend. Offenbar ist $\mathcal{M}_{tot}$ total, d.h., die Übergangsfunktion δ_{tot} ist total. Ferner gilt $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{M}_{tot})$, da für jedes Wort $w \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ der Lauf für w in $\mathcal{M}$ akzeptierend und zugleich ein akzeptierender Lauf für w in $\mathcal{M}_{tot}$ ist. Für jedes Wort $w = a_1 a_2 \ldots a_n \in \Sigma^* \setminus \mathcal{L}(\mathcal{M})$ gilt:

- falls der Lauf für w in $\mathcal{M}$ die Form $q_0\, q_1 \ldots q_m$ für ein $m < n$ hat, so gilt $\delta(q_m, a_{m+1}) = \bot$ und somit $\delta_{tot}(q_m, a_{m+1}) = p$. In diesem Fall hat der Lauf für w in $\mathcal{M}_{tot}$ die Form $q_0\, q_1 \ldots q_m\, p\, p \ldots p$ und ist ebenfalls verwerfend. Also gilt $w \notin \mathcal{L}(\mathcal{M}_{tot})$.
- falls der Lauf für w in $\mathcal{M}$ vollständig ist (d.h., die Form $q_0\, q_1 \ldots q_n$ mit $q_n \notin F$ hat), so ist $q_0\, q_1 \ldots q_n$ zugleich der Lauf von w in $\mathcal{M}_{tot}$. Wegen $q_n \notin F$ ist dieser verwerfend. Es gilt also ebenfalls $w \notin \mathcal{L}(\mathcal{M}_{tot})$.

Aufgrund dieser Beobachtung ist es keine Einschränkung anzunehmen, dass ein vorliegender DFA total ist, was aus technischen Gründen oftmals hilfreich ist.

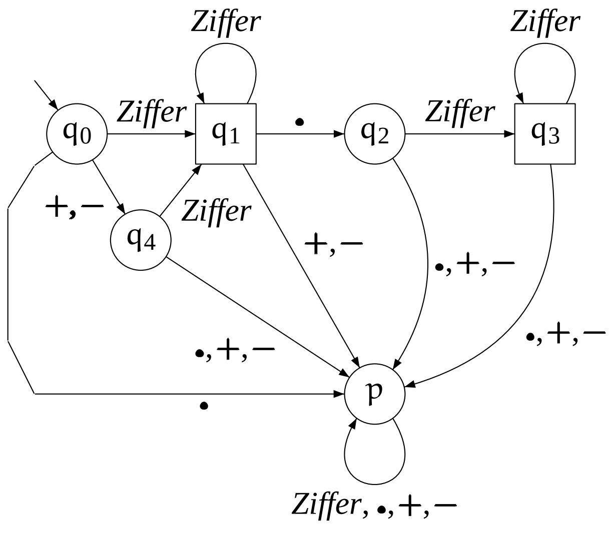


Figure 8: Totaler DFA für Dezimalzahlen

Der DFA $\mathcal{M}$ aus Abbildung 7 hat zunächst eine partielle Übergangsfunktion (z.B. ist $\delta(q_4, +) = \bot$). Er kann durch die Hinzunahme eines Fangzustands p zu einem totalen DFA $\mathcal{M}_{tot}$ modifiziert werden, siehe Abbildung 8. Beispielsweise gilt $\delta_{tot}(q_0, 78+9) = p$. Der Lauf für das Wort $78+9$ in $\mathcal{M}_{tot}$ ist $q_0\, q_1\, q_1\, p\, p$. Da p kein Endzustand ist, ist dieser Lauf verwerfend.

Endliche Automaten und reguläre Grammatiken (1. Teil)

Wir werden sehen, dass DFA und reguläre Grammatiken dieselbe Ausdrucksstärke haben. Im Beweis des folgenden Lemmas geben wir ein Verfahren an, wie man zu gegebenem DFA eine reguläre Grammatik konstruieren kann. Dieses belegt, dass DFA höchstens so ausdrucksstark wie reguläre Grammatiken sind.

Lemma 2.7 (DFA $\rightsquigarrow$ reguläre Grammatik). *Zu jedem DFA $\mathcal{M}$ gibt es eine reguläre Grammatik* G *mit* $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(G)$.

Proof. Sei $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA mit einer totalen Übergangsfunktion. Wir fassen die Zustände als Nichtterminale auf. Die Übergangsfunktion entspricht den Regeln einer regulären Grammatik. Jeden Übergang $q \xrightarrow{a} p$ in $\mathcal{M}$ fassen wir als Regel $q \to ap$ auf. Ist p ein Endzustand, so fügen wir zusätzlich eine Terminalregel $q \to a$ ein. Zusätzlich ist der Sonderfall zu berücksichtigen, dass das leere Wort von $\mathcal{M}$ akzeptiert wird. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Anfangszustand q_0 ein Endzustand ist. In diesem Fall fügen wir zusätzlich die Regel $q_0 \to \varepsilon$ ein. Die formale Definition der regulären Grammatik $G = (V, \Sigma, \mathcal{P}, S)$ ist wie folgt. Die Variablenmenge ist $V = Q$. Das Startsymbol ist $S = q_0$. Die Regeln von G sind durch folgende drei Bedingungen gegeben:

- Ist $\delta(q, a) = p$, dann ist $q \to ap$ eine Regel in G.
- Ist $\delta(q, a) = p \in F$, dann ist $q \to a$ eine Regel in G.
- Ist $q_0 \in F$, dann enthält G die ε-Regel $q_0 \to \varepsilon$.

Offenbar ist G regulär. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(\mathcal{M})$. Zunächst stellen wir fest, dass für das leere Wort gilt:

$$\begin{array}{lll} & \varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{M}) & \\ \text{gdw} & q_0 \in F & \text{(gilt in jedem DFA)} \\ \text{gdw} & q_0 \to \varepsilon \text{ ist eine Regel in } G & \text{(Definition von } G\text{)} \\ \text{gdw} & \varepsilon \in \mathcal{L}(G) & \text{(da } G \text{ keine weiteren } \varepsilon\text{-Regeln hat)} \end{array}$$

Im Folgenden sei $x = a_1 a_2 \ldots a_n \in \Sigma^*$ ein nicht-leeres Wort, also $n \geqslant 1$. Zu zeigen ist, dass x genau dann von $\mathcal{M}$ akzeptiert wird, wenn x in G herleitbar ist.

"$\Longrightarrow$": Wir nehmen an, dass $x \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$. Dann ist der zugehörende Lauf $q_0\, q_1 \ldots q_n$ in $\mathcal{M}$ akzeptierend. Daher ist $q_n \in F$ und $q_{i+1} \in \delta(q_i, a_{i+1})$ für $0 \leqslant i < n$. Grammatik G enthält also die Regeln $q_i \to a_{i+1} q_{i+1}$ für $0 \leqslant i < n-1$ sowie die Regel $q_{n-1} \to a_n$. Also ist

$$q_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regel} \\ q_0 \to a_1 q_1}}{\Rightarrow} a_1 q_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regel} \\ q_1 \to a_2 q_2}}{\Rightarrow} a_1 a_2 q_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{n-1} q_{n-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regel} \\ q_{n-1} \to a_n}}{\Rightarrow} a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$$

eine Ableitung von x in G. Also gilt $x \in \mathcal{L}(G)$.

"$\Longleftarrow$": Wir setzen nun voraus, dass $x \in \mathcal{L}(G)$. Da G regulär ist, gibt es nur zwei Arten von potentiellen Herleitungen von x in G:

(1) $q_0 \Rightarrow a_1 q_1 \Rightarrow a_1 a_2 q_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{n-1} q_{n-1} \Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n q_n \Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$

(2) $q_0 \Rightarrow a_1 q_1 \Rightarrow a_1 a_2 q_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{n-1} q_{n-1} \Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$

In beiden Möglichkeiten wird in den ersten $n-1$ Herleitungsschritten eine Regel der Form $q_{i-1} \to a_i q_i$ eingesetzt und somit das Präfix $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$ von x generiert. Aufgrund der Definition von G stimmt die Zustandsfolge $q_0\, q_1 \ldots q_{n-1}$ mit dem Lauf für $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$ in $\mathcal{M}$ überein.

- In (1) wird die Regel $q_{n-1} \to a_n q_n$ im vorletzten Schritt eingesetzt, gefolgt von der ε-Regel $q_n \to \varepsilon$. Dies ist jedoch nur dann möglich, wenn $q_0 = q_n = \delta(q_{n-1}, a_n) \in F$.

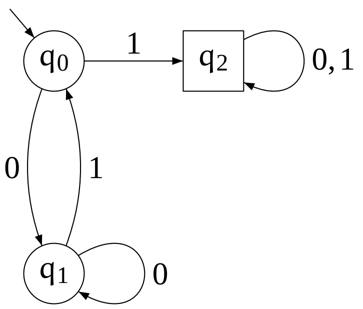
- In (2) wird im n-ten Herleitungsschritt die Regel $q_{n-1} \to a_n$ eingesetzt. Dann aber ist $q_n \overset{\text{def}}{=} \delta(q_{n-1}, a_n)$ ein Endzustand.

In beiden Fällen ist $q_0\, q_1 \ldots q_{n-1}\, q_n$ der Lauf für x in $\mathcal{M}$. Dieser ist akzeptierend, da q_n ein Endzustand ist. Also gilt $x \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$. $\Box$

Wir demonstrieren die im Beweis von Lemma 2.7 (Seite 24) angegebene Transformation am Beispiel des DFA in Abbildung 9. Die konstruierte reguläre Grammatik ist durch die Regeln

$$S \to 0B \mid 1A \mid 1 \qquad A \to 0A \mid 1A \mid 0 \mid 1 \qquad B \to 1S \mid 0B$$

gegeben. Dabei identifizieren wir S mit q_0, A mit q_2 und B mit q_1.



reguläre Grammatik mit den Variablen $S = q_0$, $A = q_2$ und $B = q_1$

Transition $q_0 \xrightarrow{0} q_1$	$\widehat{=}$	Regel $S \to 0B$
Transition $q_0 \xrightarrow{1} q_2$	$\widehat{=}$	Regel $S \to 1A$
		Regel $S \to 1$
Transition $q_1 \xrightarrow{0} q_1$	$\widehat{=}$	Regel $B \to 0B$
Transition $q_1 \xrightarrow{1} q_0$	$\widehat{=}$	Regel $B \to 1S$
Transition $q_2 \xrightarrow{a} q_2$	$\widehat{=}$	Regel $A \to aA$
		Regel $A \to a$

Figure 9: DFA $\mathcal{M} \rightsquigarrow$ reguläre Grammatik

2.1.2 Nichtdeterministische endliche Automaten

Wir betrachten nun die nichtdeterministische Variante von endlichen Automaten. Diese haben eine *Menge* von Anfangszuständen, unter denen eine nichtdeterministische Auswahl stattfindet.

Analog ordnet die Übergangsfunktion jedem Paar $(q, a) \in Q \times \Sigma$ eine *Menge* von möglichen Folgezuständen zu. Nichtdeterministische endliche Automaten unterliegen der fiktiven Annahme, dass ein Orakel zur Verfügung steht, welches den Nichtdeterminismus – also die Wahl eines Anfangszustands und die Wahl der jeweiligen Folgezustände – so aufzulösen vermag, so dass ein akzeptierender Lauf entsteht, sofern ein solcher existiert.

Definition 2.8 (Nichtdeterministischer endlicher Automat (NFA)). Ein NFA ist ein Tupel $\mathcal{M} = (Q,\ \Sigma,\ \delta,\ Q_0, F)$ bestehend aus einer endlichen Menge Q von Zuständen, einem endlichen Alphabet Σ, einer Menge $F \subseteq Q$ von Endzuständen und

- einer totalen *Übergangsfunktion* $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$,
- einer Menge $Q_0 \in 2^Q$ von *Anfangszuständen*,

wobei 2^Q die Potenzmenge von Q bezeichnet. ∎

Wie für DFA schreiben wir manchmal $q \xrightarrow{a} p$ für $p \in \delta(q, a)$. In Anlehnung an die visuelle Darstellung von NFA als Digraphen (eventuell mit parallelen Kanten) kann man die Übergangsfunktion eines NFA auch als Relation $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ auffassen.