Erweiterte Übergangsfunktion von DFA

Ein DFA ist ein Tupel $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- endliche Menge Q von Zuständen
- Alphabet Σ

  ⋮
- partielle Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \to Q$

---

induktive Definition von $\delta : Q \times \Sigma^* \to Q$

1. $\delta(q, \varepsilon) = q$
2. $\delta(q, a)$ für $a \in \Sigma$ ist bereits definiert
3. für $a \in \Sigma$ und $w \in \Sigma^+$:

$$\delta(q, aw) = \begin{cases} \delta(p, w) & : \text{ falls } p = \delta(q, a) \in Q \\ \bot & : \text{ falls } \delta(q, a) = \bot \end{cases}$$

DFA $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- endlicher Zustandsraum Q, Alphabet Σ
- Anfangszustand $q_0 \in Q$
- Endzustandsmenge $F \subseteq Q$
- partielle Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \to Q$

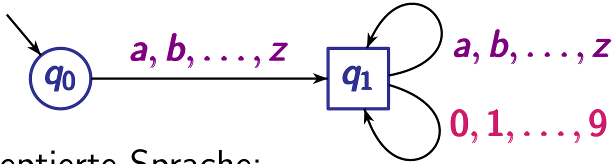
  $\rightsquigarrow$ wird erweitert zu $\delta : Q \times \Sigma^* \to Q$

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ w \in \Sigma^* : \delta(q_0, w) \in F \}$$

$$= \{ w \in \Sigma^* : \text{der Lauf für } w \text{ in } \mathcal{M} \text{ ist akzeptierend} \}$$

Beispiel: DFA für Identifier

Jeder Identifier besteht aus einem Buchstaben, gefolgt von beliebig vielen Buchstaben oder Ziffern.

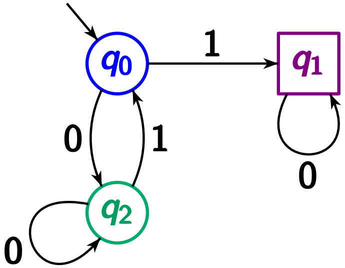


akzeptierte Sprache:

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) \;=\; \mathcal{B}\,(\mathcal{B} \cup \mathcal{Z})^*, \quad \text{wobei } \mathcal{B} = \{a, b, \ldots, z\}$$
$$\text{und } \mathcal{Z} = \{0, 1, \ldots, 9\}$$

Jedes Wort in $\mathcal{B}\,(\mathcal{B} \cup \mathcal{Z})^*$ hat einen akzeptierenden Lauf der Form $q_0\, q_1\, q_1 \ldots q_1$.

Beispiel: DFA $\mathcal{M}$



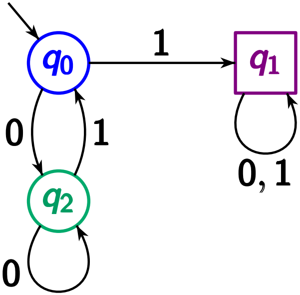
$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) \;=\; L^*K,$$
wobei $L = \{0^n1 : n \geqslant 1\}$
und $K = \{10^n : n \geqslant 0\}$

Beweis der Aussage:

1. Teil: jedes Wort xy mit $x \in L^*$ und $y \in K$ wird von $\mathcal{M}$ akzeptiert.

2. Teil: jedes von $\mathcal{M}$ akzeptierte Wort liegt in L^*K.

Welche Sprache akzeptiert der DFA $\mathcal{M}$?



alle Wörter **0** ... **0 1 0** ... **0 1 1** ...
haben einen akzeptierender Lauf

$q_0\, q_2 \ldots q_0 \ldots q_2\, q_0\, q_1\, q_1 \ldots$

$\mathcal{L}(\mathcal{M})$ = Menge aller Wörter $w \in \{0, 1\}^*$, die

- entweder mit einer **1** beginnen
- oder **0 1 1** als Teilwort enthalten

(oder beides)

DFA $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ wird total genannt, falls die Übergangsfunktion total ist, d.h., falls

$$\delta(q, a) \in Q \quad \text{für alle } q \in Q \text{ und } a \in \Sigma$$

Zu jedem DFA $\mathcal{M}$ gibt es einen äquivalenten totalen DFA $\mathcal{M}_{tot}$. Nämlich:

$$\mathcal{M}_{tot} \stackrel{\text{def}}{=} (Q \cup \{p\}, \Sigma, \delta', q_0, F)$$

wobei $p \notin Q$ neuer Zustand und für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$:

$$\delta'(q, a) = \begin{cases} q' & : \text{ falls } \delta(q, a) = q' \in Q \\ p & : \text{ falls } \delta(q, a) = \perp \end{cases} \qquad \delta(p, a) = p$$

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann gilt:

	L ist regulär, d.h., Sprache vom Typ 3
gdw	$L = \mathcal{L}(\mathcal{M})$ für einen DFA $\mathcal{M}$

zur Erinnerung: Grammatiken vom Typ 3 bestehen aus Regeln der Form

$$A \to aB \qquad A \to a \qquad A \to \varepsilon$$

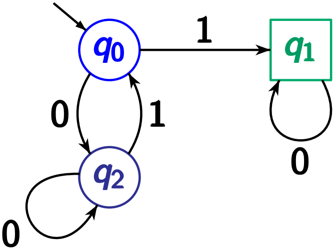
Beweisidee:

"$\Longleftarrow$": Zustände in $\mathcal{M}$ $\widehat{=}$ Variablen in der Grammatik

Transition $q \xrightarrow{a} p$ $\widehat{=}$ Regel $q \to ap$

"$\Longrightarrow$": später, mit nichtdeterministischen FA

Beispiel: DFA $\rightsquigarrow$ reguläre Grammatik



Transition		Regel
$q \xrightarrow{a} p$	$\widehat{=}$	$q \to ap$
$q \xrightarrow{a} p \in F$	$\widehat{=}$	$q \to a$

reguläre Grammatik G über dem Alphabet $\{0, 1\}$:

Variablenmenge $= \{q_0, q_1, q_2\}$ $\longleftarrow$ Zustandsmenge

Startsymbol q_0 $\longleftarrow$ Anfangszustand

Regeln:

$$
\begin{aligned}
q_0 &\to 0q_2 \mid 1q_1 \mid 1 \\
q_2 &\to 0q_2 \mid 1q_0 \\
q_1 &\to 0q_1 \mid 0
\end{aligned}
$$

Sei $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA.

reguläre Grammatik G für die Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{M})$:

$$G = (Q, \Sigma, \mathcal{P}, q_0)$$

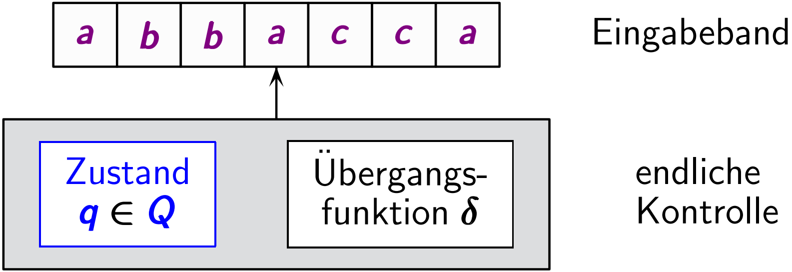
mit dem Produktionssystem $\mathcal{P}$ bestehend aus den Regeln:

$$\boxed{\begin{array}{lll} q \to ap & \text{falls} & \delta(q,a) = p \\ q \to a & \text{falls} & \delta(q,a) \in F \\ q_0 \to \varepsilon & \text{falls} & q_0 \in F \end{array}}$$

Korrektheit: $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(\mathcal{M})$

Endlicher Automat (FA)

300A



deterministisch (DFA):

- genau ein Anfangszustand
- Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ partiell

nichtdeterministisch (NFA):

- Menge von Anfangszuständen
- $\delta(q, a)$ ist Menge von Folgezuständen

Ein NFA ist ein Tupel $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$, wobei

- Q ist eine endliche Menge von Zuständen
- Σ ist ein Alphabet
- $F \subseteq Q$ ist eine Menge von Endzuständen
- $Q_0 \subseteq Q$ ist eine Menge von Anfangszuständen
- $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ totale Übergangsfunktion

Potenzmenge von Q

$\delta(q, a) \subseteq Q$, aber $\delta(q, a) = \varnothing$ ist möglich