Erweiterte Übergangsfunktion von NFA

NFA $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$

- endliche Menge Q von Zuständen
- Alphabet Σ
- totale Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$

erweiterte Übergangsfunktion für Zustandsmengen und Wörter:

$$\delta : 2^Q \times \Sigma^* \to 2^Q$$

$$\boxed{\delta(P, a) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, a)}$$

1. $\delta(P, \varepsilon) = P$
2. $\delta(P, aw) = \bigcup_{q \in P} \delta\big(\delta(q, a), w\big)$ für $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$

Sei $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ ein NFA, $w = a_1\, a_2 \ldots a_n \in \Sigma^*$.

Ein Lauf für w in $\mathcal{M}$ ist eine Folge $q_0\, q_1\, \ldots\, q_m$ von Zuständen, so dass

(1) $q_0 \in Q_0$

(2) $q_{i+1} \in \delta(q_i, a_{i+1})$ für $i = 0, 1, \ldots, m{-}1$

(3) $m = |w| = n$ oder $m < n$ & $\delta(q_m, a_{m+1}) = \varnothing$

Lauf $q_0\, q_1\, \ldots\, q_m$ für w heißt

- akzeptierend, falls $m = n$ & $q_n \in F$
- verwerfend, falls $m = n$ & $q_n \notin F$ oder $m < n$

Akzeptierte Sprache eines NFA

Sei $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ ein NFA.

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ w \in \Sigma^* : \delta(Q_0, w) \cap F \neq \varnothing \}$$

$$= \{ w \in \Sigma^* : \text{es gibt wenigstens einen akzeptierenden Lauf für } w \}$$

akzeptierender Lauf für $w = a_1 a_2 \ldots a_n \in \Sigma^*$:

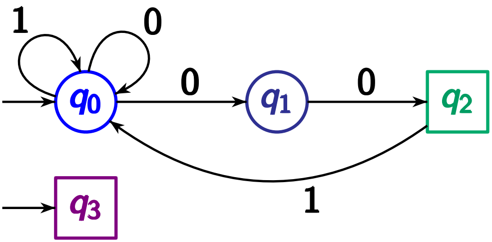
Zustandsfolge $q_0\, q_1 \ \ldots\ q_n$ mit

(1) $q_0 \in Q_0$

(2) $q_{i+1} \in \delta(q_i, a_{i+1})$ für $i = 0, 1, \ldots, n-1$

(3) $q_n \in F$

Beispiel: NFA $\mathcal{M}$

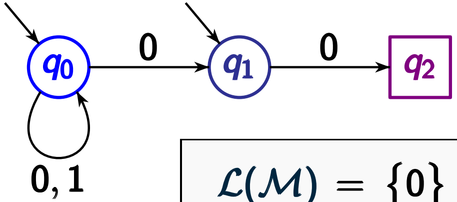


$$\Sigma = \{0,1\}$$
$$Q_0 = \{q_0, q_3\}$$
$$F = \{q_2, q_3\}$$

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \{\varepsilon\} \cup \{\, w00 \,:\, w \in \{0,1\}^* \,\}$$

1. ε ist einziges Wort, das einen akzeptierenden Lauf hat, der in q_3 endet
2. genau die Wörter $w00$ mit $w \in \{0,1\}^*$ haben einen akzeptierenden Lauf, der in q_2 endet

Beispiel: NFA

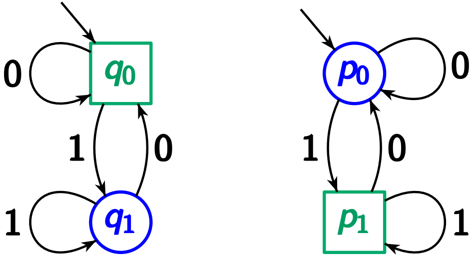


$$\boxed{\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \{0\} \cup \left\{ w00 : w \in \{0,1\}^* \right\}}$$

1. **0** ist das einzige Wort, das einen akzeptierenden Lauf besitzt, der in q_1 beginnt.
2. alle Wörter, die einen akzeptierenden Lauf $q_0 \rightsquigarrow q_2$ haben, enden mit **00**.
3. alle Wörter w**00** haben einen akzeptierenden Lauf

$$q_0 \xrightarrow{w} q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{0} q_2$$

Welche Sprache akzeptiert der NFA … ?



$Q_0 = \{q_0, p_0\}$

$F = \{q_0, p_1\}$

Antwort: $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \{0,1\}^*$

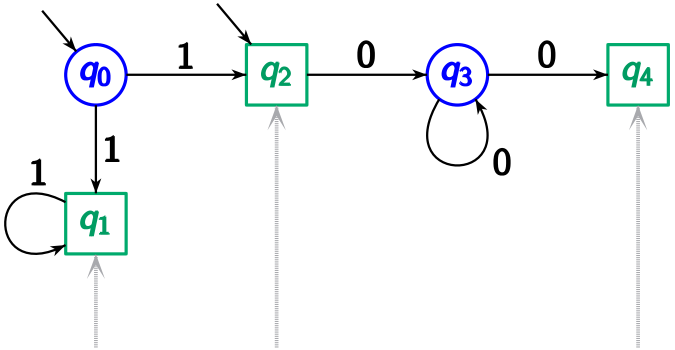
zeige: $\delta(Q_0, w) \cap \{q_0, p_1\} \neq \varnothing$ für alle $w \in \{0,1\}^*$

$\delta(Q_0, \varepsilon) = \{q_0, p_0\}$

$\delta(Q_0, x1) = \{q_1, p_1\}$

$\delta(Q_0, x0) = \{q_0, p_0\}$

Welche Sprache akzeptiert der NFA . . . ? 376



Wörter der Form 1^n, $n \geqslant 1$

$\{\varepsilon, 1\}$

Wörter der Form
0^n, $n \geqslant 2$ $\quad q_2 \rightsquigarrow q_4$
10^n, $n \geqslant 2$ $\quad q_0 \rightsquigarrow q_4$

Antwort: $\{1^n : n \geqslant 0\} \cup \{10^n, 0^n : n \geqslant 2\}$

Beispiel: NFA für Mustererkennung

gegeben: Muster $M = a_1 a_2 \ldots a_m \in \Sigma^+$
Text $T = b_1 b_2 \ldots b_t \in \Sigma^+$

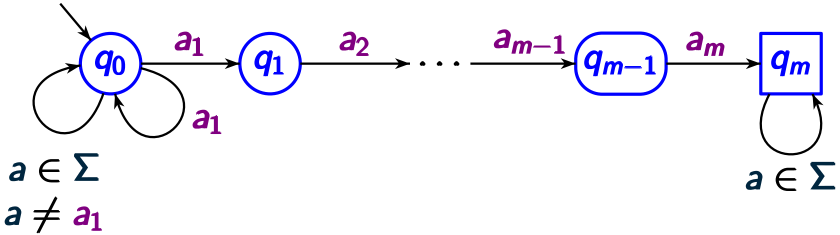
gefragt: kommt das Muster M im Text T vor **?**
d.h., ist M ein Teilwort von T **?**

nichtdeterministischer Mustererkennungsalgorithmus:

1. Schritt: rate nichtdeterministisch eine Wortposition i in T
2. Schritt: prüfe, ob das Muster M ab Position i im Text T beginnt

Realisierung durch NFA für festes Muster

NFA $\mathcal{M}$ für das Muster $M = a_1\, a_2 \ldots a_m \in \Sigma^+$



> akzeptierte Sprache:
>
> $$\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \{\, T \in \Sigma^* : M \text{ ist Teilwort von } T \,\}$$

Menge aller Texte T, in denen das Muster M vorkommt

DFA $\rightsquigarrow$ NFA und NFA $\rightsquigarrow$ DFA

Zu jedem DFA $\mathcal{M}$ gibt es einen äquivalenten NFA, d.h., einen NFA $\mathcal{M}_{\mathsf{ndet}}$ mit $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{M}_{\mathsf{ndet}})$.

Beweis: jeder DFA kann als NFA aufgefasst werden

Zu jedem NFA $\mathcal{M}$ gibt es einen äquivalenten DFA, d.h., einen DFA $\mathcal{M}_{\mathsf{det}}$ mit $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{\mathsf{det}}) = \mathcal{L}(\mathcal{M})$.

Beweis: mit Potenzmengenkonstruktion

In diesem Sinn sind DFA und NFA äquivalent.

NFA $\rightsquigarrow$ DFA via Potenzmengenkonstruktion

Sei $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ ein NFA.

Potenzmengenkonstruktion:

$$\mathcal{M}_{\mathrm{det}} = (Q_{\mathrm{det}}, \Sigma, \delta_{\mathrm{det}}, q_0, F_{\mathrm{det}}), \text{ wobei}$$

$Q_{\mathrm{det}} = 2^Q$ Potenzmenge von Q

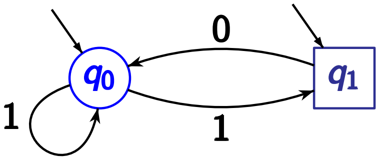
$q_0 = Q_0$ Menge der Anfangszustände von $\mathcal{M}$

$F_{\mathrm{det}} = \{ P \subseteq Q : P \cap F \neq \varnothing \}$

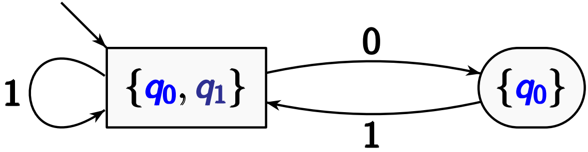
$$\delta_{\mathrm{det}}(P, a) = \bigcup_{p \in P} \delta(p, a)$$

Beispiel zur Potenzmengenkonstruktion

NFA $\mathcal{M}$



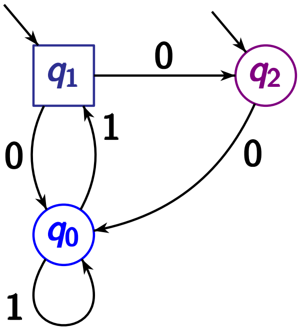
Potenzmengenkonstruktion: DFA $\mathcal{M}_{\mathsf{det}}$ (relevanter Teil)



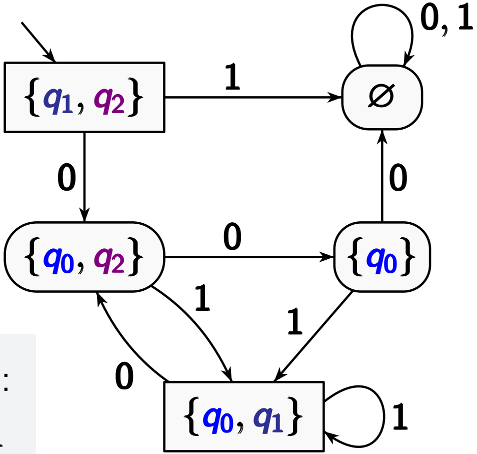
$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{M}_{\mathsf{det}}) = \{\, 1^m w : w \in L^*,\ m \geqslant 0 \,\},$$

$$\text{wobei } L = \{\, 01^n : n \geqslant 1 \,\}$$

NFA $\mathcal{M}$



on-the-fly Konstruktion des Potenzmengen-DFA



unerreichbare Zustände:

$\{q_1\}$, $\{q_2\}$, $\{q_0, q_1, q_2\}$

NFA für das Teilsummenproblem

für feste ganze Zahl $K \geqslant 2$

gegeben: Zahlenfolge $a_1, \ldots, a_n$ mit $a_i \in \{1, \ldots, K\}$

gefragt: gibt es eine Teilmenge I von $\{1, \ldots, n\}$, so dass $\sum_{i \in I} a_i = K$?

NFA $\mathcal{M}_K = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$, wobei

$Q = \{0, 1, \ldots, K\}$ $\qquad Q_0 = \{0\}$

$\Sigma = \{1, 2, \ldots, K\}$ $\qquad F = \{K\}$

Übergangsfunktion:

$$\delta(q, a) = \{\, q,\, q + a \,\} \cap Q$$