

## Endliche Automaten und reguläre Grammatiken (2. Teil)

In Lemma 2.7 auf Seite 25 haben wir gezeigt, dass die durch einen DFA akzeptierte Sprache durch eine reguläre Grammatik erzeugt wird. Die wesentliche Idee der Konstruktion einer regulären Grammatik bestand darin, die Übergänge  $q \xrightarrow{a} p$  im DFA als Regeln  $q \rightarrow ap$  einer Grammatik aufzufassen. Tatsächlich ist die im Beweis von Lemma 2.7 angegebene Transformation mit leichten Modifikationen auch für NFA einsetzbar, so dass die resultierende Grammatik sowohl regulär als auch  $\varepsilon$ -frei ist. Siehe Übungen.

Soweit zur Konstruktion regulärer Grammatiken für gegebenen endlichen Automaten. Umgekehrt können reguläre Grammatiken in NFA (und mit der Potenzmengenkonstruktion in DFA) überführt werden. Die Grundidee ist auch hier wieder eine Korrespondenz zwischen Übergängen  $q \xrightarrow{a} p$  im NFA und den Regeln  $q \rightarrow ap$  der Grammatik herzustellen.

**Lemma 2.17 (Reguläre Grammatik  $\rightsquigarrow$  NFA).** *Zu jeder regulären Grammatik  $G$  gibt es einen NFA  $\mathcal{M}$  mit  $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(\mathcal{M})$ .*

*Proof.* Sei  $G = (V, \Sigma, \mathcal{P}, S)$  eine reguläre Grammatik. Wir definieren nun einen NFA

$$\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F),$$

der genau die Wörter der von  $G$  erzeugten Sprache akzeptiert. Die Zustandsmenge von  $\mathcal{M}$  ist

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} V \cup \{q_F\}, \text{ wobei } q_F \notin V.$$

Die Anfangszustandsmenge besteht aus dem Startsymbol von  $G$ , also  $Q_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{S\}$ . Die Endzustandsmenge enthält den Spezialzustand  $q_F$  sowie alle Variablen  $A$ , aus denen das leere Wort herleitbar ist:

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \{q_F\} \cup \{A \in V : A \rightarrow \varepsilon\}$$

Die Übergangsfunktion  $\delta$  ist durch folgende beiden "Axiome" gegeben:

$$\begin{aligned} B \in \delta(A, a) & \quad \text{gdw} \quad A \rightarrow aB \\ q_F \in \delta(A, a) & \quad \text{gdw} \quad A \rightarrow a \end{aligned}$$

Dabei sind  $A, B \in V$  und  $a \in \Sigma$ . Weiter ist  $\delta(q_F, a) \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$  für alle  $a \in \Sigma$ .

Wir zeigen nun die Korrektheit der angegebenen Konstruktion. Hierzu ist  $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(G)$  nachzuweisen. Zunächst stellen wir fest, dass das leere Wort entweder zu beiden Sprachen  $\mathcal{L}(\mathcal{M})$  und  $\mathcal{L}(G)$  oder zu keiner der beiden Sprachen gehört:

$$\varepsilon \in \mathcal{L}(G) \quad \text{gdw} \quad S \rightarrow \varepsilon \quad \text{gdw} \quad S \in F \quad \text{gdw} \quad \varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{M}).$$

Sei nun  $w = a_1 a_2 \dots a_n \in \Sigma^+$ . Zu zeigen ist, dass  $w$  genau dann in  $\mathcal{L}(\mathcal{M})$  liegt, wenn  $w$  eine Herleitung in  $G$  besitzt.

Wir nehmen zunächst an, dass  $w \in \mathcal{L}(G)$ . Das Startsymbol ist per Definition der einzige Anfangszustand, also  $Q_0 = \{S\}$ . Da  $G$  eine reguläre Grammatik ist, gibt es zwei Arten von Ableitungen für das Wort  $w$ .

1. Fall: Sei

$$S \Rightarrow a_1 B_1 \Rightarrow a_1 a_2 B_2 \Rightarrow^* a_1 a_2 \dots a_{n-1} B_{n-1} \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$$

die Ableitung des Wortes  $w$  in  $G$ . Während die Regeln  $B_{i-1} \rightarrow a_i B_i$  bzw.  $S \rightarrow a_1 B_1$  in  $G$  Transitionen  $B_{i-1} \xrightarrow{a_i} B_i$  bzw.  $S \xrightarrow{a_1} B_1$  in  $\mathcal{M}$  für  $i = 2, \dots, n-1$  entsprechen, korrespondiert die Regel  $B_{n-1} \rightarrow a_n$  mit der Transition  $B_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_F$ . Da  $q_F$  ein Endzustand ist, bildet die Zustandsfolge  $S B_1 B_2 \dots B_{n-1} q_F$  einen akzeptierenden Lauf in  $\mathcal{M}$ . Damit ist  $w \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ .

2. Fall: Nun sei

$$S \Rightarrow a_1 B_1 \Rightarrow a_1 a_2 B_2 \Rightarrow^* a_1 a_2 \dots a_{n-1} B_{n-1} \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n B_n \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$$

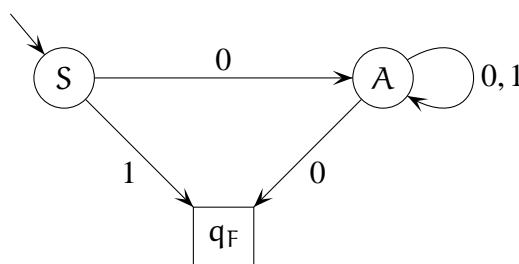
die Ableitung des Wortes  $w$  in  $G$ . Wie im 1. Fall entsprechen die Regeln  $B_{i-1} \rightarrow a_i B_i$  bzw.  $S \rightarrow a_1 B_1$  in  $G$  den Transitionen  $B_{i-1} \xrightarrow{a_i} B_i$  bzw.  $S \xrightarrow{a_1} B_1$  in  $\mathcal{M}$  für  $i = 2, \dots, n$ . Wegen der Definition der Menge der Endzustände  $F$  impliziert die Regel  $B_n \rightarrow \varepsilon$  in  $G$ , dass  $B_n$  ein Endzustand ist. Damit ist  $S B_1 B_2 \dots B_{n-1} B_n$  ein akzeptierender Lauf in  $\mathcal{M}$ , und somit  $w \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ .

Es bleibt zu zeigen, dass jedes Wort, welches einen akzeptierenden Lauf in  $\mathcal{M}$  hat, ein in  $G$  herleitbares Wort ist. Die Argumentation ist ähnlich und wird hier nicht vorgeführt.  $\square$

**Beispiel 2.18 (Reguläre Grammatik  $\rightsquigarrow$  NFA).** Für die reguläre Grammatik  $G$  mit den Regeln

$$S \rightarrow 1 \mid 0A, \quad A \rightarrow 0 \mid 0A \mid 1A$$

liefert die im Beweis von Lemma 2.17 angegebene Konstruktion folgenden NFA:



Fügt man in  $G$  die  $\varepsilon$ -Regel  $A \rightarrow \varepsilon$  ein, so wird  $A$  zum Endzustand.  $\blacksquare$

**Corollar 2.19 (Äquivalenz von regulären Grammatiken und NFA/DFA).** Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  eine Sprache. Dann gilt:

$L$  ist regulär, d.h.,  $L = \mathcal{L}(G)$  für eine reguläre Grammatik  $G$

gdw es gibt einen DFA  $\mathcal{M}$  mit  $L = \mathcal{L}(\mathcal{M})$

gdw es gibt einen NFA  $\mathcal{M}$  mit  $L = \mathcal{L}(\mathcal{M})$

## 2.2 Eigenschaften regulärer Sprachen

Aus der Darstellbarkeit durch endliche Automaten lassen sich einige zentrale Eigenschaften regulärer Sprachen herleiten. Wir diskutieren Abschlusseigenschaften (Abschnitt 2.2.1) sowie Algorithmen für grundlegende Fragestellungen (Abschnitt 2.2.3) und stellen ein notwendiges Kriterium für reguläre Sprachen vor (Abschnitt 2.2.2).

## 2.2.1 Abschlusseigenschaften

Wir befassen uns zunächst mit Abschlusseigenschaften von regulären Sprachen unter den üblichen Operatoren für formale Sprachen. Wir werden sehen, dass reguläre Sprachen unter allen gängigen Verknüpfungsoperatoren (Vereinigung, Durchschnitt, Konkatenation, Kleeneabschluss und Komplementbildung) abgeschlossen sind. Hierzu erläutern wir, wie sich diese Operationen mit endlichen Automaten realisieren lassen.

**Vereinigung.** Seien  $\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, Q_{0,1}, F_1)$  und  $\mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, Q_{0,2}, F_2)$  zwei NFA mit  $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ . Die Grundidee zur Bildung des NFA für die Vereinigung besteht darin, für ein gegebenes Eingabewort  $w$  nichtdeterministisch zu entscheiden, mit welchem der beiden Automaten  $\mathcal{M}_1$  oder  $\mathcal{M}_2$  die Worterkennung durchgeführt wird. Wir definieren

$$\mathcal{M}_1 \uplus \mathcal{M}_2 \stackrel{\text{def}}{=} (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta, Q_{0,1} \cup Q_{0,2}, F_1 \cup F_2),$$

wobei

$$\delta(q, a) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \delta_1(q, a) & : \text{ falls } q \in Q_1 \\ \delta_2(q, a) & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Offenbar gilt  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_1 \uplus \mathcal{M}_2) = \mathcal{L}(\mathcal{M}_1) \cup \mathcal{L}(\mathcal{M}_2)$ . Man beachte, dass  $\mathcal{M}_1 \uplus \mathcal{M}_2$  kein DFA ist; auch dann nicht, wenn  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$  deterministisch sind.

**Durchschnitt.** Seien  $\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{0,1}, F_1)$  und  $\mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{0,2}, F_2)$  zwei NFA. Einen NFA für die Schnittsprache  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{M}_2)$  erhalten wir durch eine Produktkonstruktion. Diese unterliegt der Vorstellung, dass  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$  parallel geschaltet werden. Ist  $w$  das Eingabewort, dann starten wir die synchrone Bearbeitung des Worts  $w$  durch  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$ . Sobald einer der Automaten frühzeitig verwirft, dann auch der Produktautomat. Nur wenn beide Automaten akzeptieren, dann akzeptiert auch der Produktautomat. Wir definieren

$$\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \stackrel{\text{def}}{=} (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, Q_{0,1} \times Q_{0,2}, F_1 \times F_2),$$

wobei

$$\delta(\langle q_1, q_2 \rangle, a) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle p_1, p_2 \rangle : p_1 \in \delta_1(q_1, a), p_2 \in \delta_2(q_2, a) \}.$$

Für den Nachweis der Korrektheit ist zu zeigen, dass

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2) = \mathcal{L}(\mathcal{M}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{M}_2).$$

Diese Aussage folgt aus der Beobachtung, dass die akzeptierenden Läufe im Produktautomaten  $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$  die Form

$$\langle q_{0,1}, q_{0,2} \rangle \langle q_{1,1}, q_{1,2} \rangle \dots \langle q_{n,1}, q_{n,2} \rangle$$

haben, wobei  $q_{0,1} q_{1,1} \dots q_{n,1}$  ein akzeptierender Lauf in  $\mathcal{M}_1$  und  $q_{0,2} q_{1,2} \dots q_{n,2}$  ein akzeptierender Lauf in  $\mathcal{M}_2$  sind. Daher wird jedes Wort in  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)$  auch von  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$  akzeptiert. Liegen umgekehrt akzeptierende Läufe  $q_{0,1} q_{1,1} \dots q_{n,1}$  und  $q_{0,2} q_{1,2} \dots q_{n,2}$  für ein Wort  $w$  in  $\mathcal{M}_1$  bzw.  $\mathcal{M}_2$  vor, so können diese zu einem akzeptierenden Lauf  $\langle q_{0,1}, q_{0,2} \rangle \langle q_{1,1}, q_{1,2} \rangle \dots \langle q_{n,1}, q_{n,2} \rangle$  im Produktautomaten zusammengesetzt werden. Also ist der Schnitt von  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_1)$  und  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_2)$  in der akzeptierten Sprache von  $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$  enthalten.

Wird die Produktkonstruktion für zwei DFA  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  durchgeführt, dann entsteht ein DFA, dessen Übergangsfunktion durch die Formel

$$\delta(\langle q_1, q_2 \rangle, a) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \langle \delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a) \rangle & : \text{ falls } \delta_1(q_1, a) \neq \perp \text{ und } \delta_2(q_2, a) \neq \perp \\ \perp & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

gegeben ist. Der Produktautomat von DFA ist also wieder ein DFA.

**Beispiel 2.20 (Durchschnitt, Produkt-DFA).** Als Beispiel betrachten wir die zwei DFA  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$  links in Abbildung 14, welche die Sprachen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{M}_1) &= \{1^n 00^m : m, n \geq 0\} \\ \mathcal{L}(\mathcal{M}_2) &= \{0x_1 0x_2 0 \dots 0x_k 0 : k \geq 0, x_1, \dots, x_k \in \{0, 1\}\} \end{aligned}$$

akzeptieren. Der Produkt-DFA besteht aus vier Zuständen. Diese sind Paare bestehend aus je einem Zustand von  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$ . Der Anfangszustand ist  $\langle q_0, p_0 \rangle$ . Der Endzustand ist  $\langle q_1, p_1 \rangle$ . Man überzeugt sich leicht davon, dass die akzeptierte Sprache des Produkt-DFA genau aus den Wörtern  $0^{2k+1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , besteht. Tatsächlich setzt sich die Durchschnittssprache  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{M}_2)$  aus genau denjenigen Wörtern  $w$  zusammen, die zugleich die Gestalt  $1^n 00^m$  und  $0x_1 0 \dots 0x_k 0$ ,  $x_i \in \{0, 1\}$ , haben. Also  $n = 0$ ,  $x_1 = \dots = x_k = 0$  und  $m = 2k$ , und somit  $1^n 00^m = 0^{2k+1}$ . ■

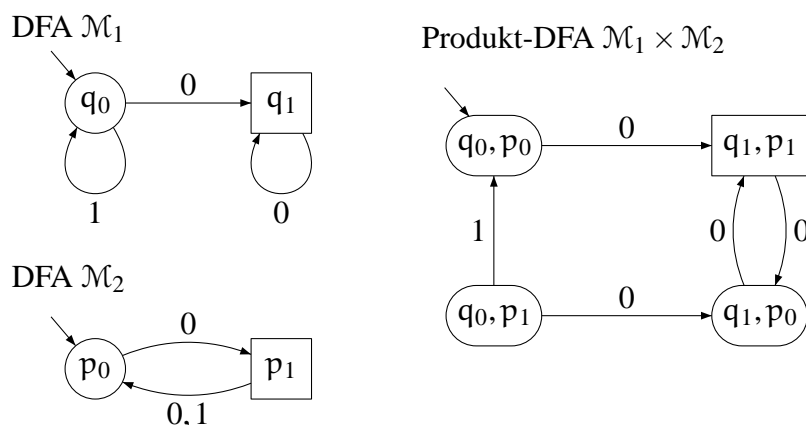


Figure 14: Beispiel für Produktkonstruktion  $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$

**Komplement.** Für den Komplementoperator gehen wir von einem DFA  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  mit einer totalen Übergangsfunktion aus. Einen DFA  $\overline{\mathcal{M}}$  für die Komplementsprache  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}}) = \Sigma^* \setminus \mathcal{L}(\mathcal{M})$  erhält man durch Komplementierung der Endzustandsmenge von  $\mathcal{M}$ :

$$\overline{\mathcal{M}} \stackrel{\text{def}}{=} (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$$

Da  $\mathcal{M}$  total ist, besitzt jedes Wort  $w = a_1 a_2 \dots a_n \in \Sigma^*$  einen “vollständigen” Lauf  $q_0 q_1 \dots q_n$  in  $\mathcal{M}$ . Dies ist zugleich der Lauf für  $w$  in  $\overline{\mathcal{M}}$ . Da die Endzustandsmengen in  $\mathcal{M}$  und  $\overline{\mathcal{M}}$  komplementär sind, ist  $q_0 q_1 \dots q_n$  genau dann in  $\mathcal{M}$  akzeptierend, wenn  $q_0 q_1 \dots q_n$  in  $\overline{\mathcal{M}}$  verwerfend ist:

$$w \in \mathcal{L}(\mathcal{M}) \quad \text{gdw} \quad q_n \in F \quad \text{gdw} \quad q_n \notin Q \setminus F \quad \text{gdw} \quad w \in \Sigma^* \setminus \mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}})$$

Also ist  $\overline{\mathcal{M}}$  ein DFA mit  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}}) = \overline{\mathcal{L}(\mathcal{M})}$ . Die Konstruktion des Komplementautomaten erfordert lediglich  $\mathcal{O}(|Q|)$  Schritte.

Die Annahme, dass der vorliegende DFA eine totale Übergangsfunktion hat, ist wesentlich, da alle Wörter  $w$  von  $\overline{\mathcal{M}}$  akzeptiert werden müssen, für die ein DFA  $\mathcal{M}$  mit partieller Übergangsfunktion eine vorzeitig abbrechende (verwerfende) Berechnung hat. Die entsprechende Konstruktion schlägt auch für NFA fehl. Dieser Sachverhalt ist wegen der Asymmetrie von Akzeptanz und Verwurf in nichtdeterministischen Automaten nicht verwunderlich: ein NFA akzeptiert genau dann, wenn es wenigstens einen akzeptierenden Lauf gibt; es kann jedoch auch verwerfende Läufe für das betreffende Eingabewort geben. Andererseits wird ein Eingabewort  $w$  nur dann von einem NFA verworfen, wenn *alle* Läufe für  $w$  verwerfend sind. Liegt ein NFA vor, dann kann mit der Potenzmengenkonstruktion (siehe Beweis von Satz 2.15 auf Seite 30) ein äquivalenter DFA konstruiert und auf diesen der Komplementoperator angewendet werden.

**Vereinigung für DFA.** Wir haben erwähnt, dass die oben angegebene Konstruktion für die Vereinigung zunächst einen NFA liefert; auch wenn zwei DFA verknüpft werden. Liegen zwei DFA  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  mit disjunkten Zustandsmengen vor, für die ein DFA für die Sprache  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_1) \cup \mathcal{L}(\mathcal{M}_2)$  erstellt werden soll, so kann man den Operator  $\uplus$  anwenden und dann die Potenzmengenkonstruktion durchführen. Wenn  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$  deterministisch sind, dann sind die erreichbaren Zustände der Potenzmengenkonstruktion zweielementige Mengen  $\{q, p\}$  bestehend aus einem Zustand  $q$  in  $\mathcal{M}_1$  und einem Zustand  $p$  von  $\mathcal{M}_2$ . Diese zweielementigen Mengen  $\{q, p\}$  kann man als Paare  $\langle q, p \rangle$  und Zustände einer für die Vereinigung modifizierten Produktkonstruktion auffassen. Diese modifizierte Produktkonstruktion kann man mittels der de Morganschen Regel

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}_1) \cup \mathcal{L}(\mathcal{M}_2) = \overline{\overline{\mathcal{L}(\mathcal{M}_1) \cap \overline{\mathcal{L}(\mathcal{M}_2)}}},$$

welche die Vereinigung auf die Komplement- und Durchschnittsbildung zurückführt, aus der gewöhnlichen Produktkonstruktion für den Durchschnitt herleiten. Die Aussage, dass der DFA

$$\mathcal{M} = \overline{\overline{\mathcal{M}_1} \otimes \overline{\mathcal{M}_2}}$$

genau die Vereinigungssprache akzeptiert, kann man sich intuitiv wie folgt klarmachen. Die Endzustände von  $\mathcal{M}$  sind genau diejenigen Zustandspaare  $\langle q_1, q_2 \rangle$ , für die wenigstens einer der beiden Zustände  $q_1$  oder  $q_2$  ein Endzustand ist. Somit akzeptiert  $\mathcal{M}$  genau dann, wenn wenigstens einer der Läufe in  $\mathcal{M}_1$  oder  $\mathcal{M}_2$  akzeptierend ist. Tatsächlich ist der Umweg über die Komplementierung unnötig, da es genügt, den Produktautomaten von  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$  zu bilden und diesen mit der Endzustandsmenge

$$F = \{ \langle q_1, q_2 \rangle : q_1 \in F_1 \text{ oder } q_2 \in F_2 \}$$

zu versehen. Dabei müssen wir voraussetzen, dass  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$  jeweils mit einer totalen Übergangsfunktion ausgestattet sind. Alternativ kann man den Zustandsraum des Produkts auch um die Zustandsräume von  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$  erweitern (wobei  $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$  unterstellt wird) und z.B. von Zustand  $\langle q_1, q_1 \rangle$  in Zustand  $\delta_1(q_1, a)$  von  $\mathcal{M}_1$  übergehen, falls das Zeichen  $a$  gelesen wird und  $\delta_2(q_2, a) = \perp$ . Die Menge  $F$  der Endzustände des Produkts ist dann um die Endzustände von  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$  zu erweitern.

## $\epsilon$ -NFA

Als technisches Hilfsmittel zur Behandlung von Konkatenation und Kleeneabschluss betrachten wir eine Erweiterung von NFA, in denen  $\epsilon$ -Transitionen möglich sind, welche im Folgenden kurz  $\epsilon$ -NFA genannt werden.  $\epsilon$ -Transitionen sind *spontane Zustandsveränderungen*, welche unabhängig vom Zeichen unter dem Lesekopf stattfinden können und welche die Position des Lesekopfs unverändert lassen. Es können beliebig viele  $\epsilon$ -Transitionen hintereinander stattfinden.

**Definition 2.21 ( $\epsilon$ -NFA).** Ein  $\epsilon$ -NFA ist ein Tupel  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ , dessen Komponenten  $Q, \Sigma, Q_0$  und  $F$  wie in einem NFA definiert sind und dessen Übergangsfunktion eine Funktion des Typs

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow 2^Q$$

ist. Ein akzeptierender Lauf für ein Wort  $w \in \Sigma^*$  in  $\mathcal{M}$  ist eine Zustandsfolge  $q_0 q_1 \dots q_m$ , so dass folgende Eigenschaften gelten:

- (1)  $q_0 \in Q_0$
- (2) es gibt eine natürliche Zahl  $m \geq |w|$  und Elemente  $b_1, b_2, \dots, b_m \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ , so dass  $w = b_1 b_2 \dots b_m$  und  $q_{i+1} \in \delta(q_i, b_{i+1})$  für  $1 \leq i \leq m$ .
- (3)  $q_m \in F$

Die akzeptierte Sprache von  $\mathcal{M}$  ist dann wie für gewöhnliche NFA durch

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ w \in \Sigma^* : \text{es gibt einen akzeptierenden Lauf für } w \text{ in } \mathcal{M} \}$$

definiert. ■

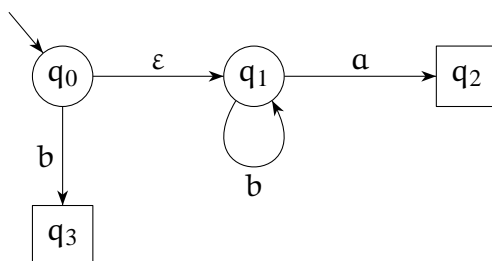


Figure 15:  $\epsilon$ -NFA

Als Beispiel betrachten wir den  $\epsilon$ -NFA in Abbildung 15. Dieser akzeptiert die Sprache  $L = \{b\} \cup \{b^n a : n \in \mathbb{N}\}$ .

Offenbar kann jeder NFA (und damit auch jeder DFA) als  $\epsilon$ -NFA interpretiert werden. Umgekehrt kann der Effekt von  $\epsilon$ -Transitionen durch zusätzliche Transitionen mit Beschriftungen des Eingabealphabets und geeignete Wahl der Anfangs- oder Endzustandsmenge simuliert werden.

**Lemma 2.22 ( $\epsilon$ -NFA  $\rightsquigarrow$  NFA).** Zu jedem  $\epsilon$ -NFA gibt es einen NFA  $\mathcal{M}'$  mit  $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{M}')$ .

*Proof.* Sei  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$  ein  $\epsilon$ -NFA. Ein NFA  $\mathcal{M}'$  ohne  $\epsilon$ -Transitionen wird nun konstruiert, indem ein Zustand  $q$  eine Transition zu einem Zustand  $p$  hat ( $q \xrightarrow{a} p$ ), wenn  $q$  in  $\mathcal{M}$

eine  $\alpha$ -Transition hat und anschließend durch beliebig viele (0 oder mehrere)  $\varepsilon$ -Transitionen  $p$  erreicht wird.

Die reflexive, transitive Hülle von  $\xrightarrow{\varepsilon}$  wird mit  $\xRightarrow{\varepsilon}$  bezeichnet, d. h., sind  $q, p \in Q$ , so gilt:

$$p \xRightarrow{\varepsilon} q \quad \text{gdw} \quad q \text{ ist von } p \text{ über 0 oder mehrere } \varepsilon\text{-Transitionen erreichbar}$$

Es gilt also  $p \xRightarrow{\varepsilon} q$  genau dann, wenn es eine Zustandsfolge  $p_0 p_1 \dots p_n$  der Länge  $n \geq 0$  gibt, so dass  $p_0 = p$ ,  $p_n = q$  und  $p_{i+1} \in \delta(p_i, \varepsilon)$  für  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , d.h.,

$$p = p_0 \xrightarrow{\varepsilon} p_1 \xrightarrow{\varepsilon} \dots \xrightarrow{\varepsilon} p_n = q.$$

Wir konstruieren nun den NFA  $\mathcal{M}'$ , dessen Zustände, Alphabet und Endzustände wie im  $\varepsilon$ -NFA  $\mathcal{M}$  definiert sind:

$$\mathcal{M}' \stackrel{\text{def}}{=} (Q, \Sigma, \delta', Q'_0, F).$$

Weiter sind

$$\begin{aligned} Q'_0 &= \{p \in Q : q_0 \xRightarrow{\varepsilon} p \text{ für ein } q_0 \in Q_0\} \quad \text{und} \\ \delta'(q, a) &= \{p \in Q : q \xrightarrow{a} r \xRightarrow{\varepsilon} p \text{ für ein } r \in Q\}. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{M}')$ .

“ $\subseteq$ ”: Sei  $w = a_1 a_2 \dots a_n \in \Sigma^*$  ein Wort, wobei die  $a_i$ 's Elemente des Alphabets  $\Sigma$  sind, so gilt  $w \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$  genau dann, wenn es eine Zustandsfolge  $r_0 q_0 r_1 q_1 r_2 \dots q_{n-1} r_n q_n$  mit  $r_0 \in Q_0$ ,  $q_n \in F$  und

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} r_0 & \xRightarrow{\varepsilon} & q_0 & \xrightarrow{a_1} & r_1 & \xRightarrow{\varepsilon} & q_1 & \xrightarrow{a_2} & r_2 & \xRightarrow{\varepsilon} & \dots & \xrightarrow{a_{n-1}} & r_{n-1} & \xRightarrow{\varepsilon} & q_{n-1} & \xrightarrow{a_n} & r_n & \xRightarrow{\varepsilon} & q_n \\ \uparrow & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \uparrow \\ \in Q_0 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \in F \end{array}$$

gibt. Es gilt also  $q_0 \in Q'_0$  und  $q_{i+1} \in \delta_\varepsilon(q_i, a_{i+1})$  für  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , und somit  $q_n \in \delta'(q_0, w)$ . Die Zustandsfolge  $q_0 q_1 \dots q_n$  ist also ein akzeptierender Lauf von  $\mathcal{M}'$ .

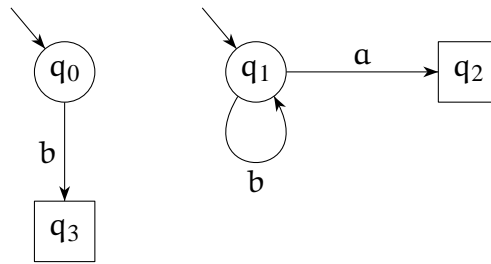
“ $\supseteq$ ”: Sei  $w = a_1 a_2 \dots a_n \in \Sigma^*$  und sei  $p_0 p_1 \dots p_n$  ein akzeptierender Lauf für  $w$  in  $\mathcal{M}'$ , d. h.,

$$p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} p_n.$$

Dann ist  $p_0 \in Q'_0$  und damit existiert ein  $q_0 \in Q_0$ , so dass  $q_0 \xRightarrow{\varepsilon} p_0$ . Außerdem sind  $p_n \in F' = F$ . Für alle  $i = 1, \dots, n$  ist entweder  $p_{i-1} \xrightarrow{a_i} p_i$  eine Transition in  $\mathcal{M}$  oder es existiert ein Zustand  $q_i \in Q$ , so dass  $p_{i-1} \xrightarrow{a_i} q_i$  und  $q_i \xRightarrow{\varepsilon} p_i$ . Damit hat  $\mathcal{M}$  einen akzeptierenden Lauf der Form  $q_0 \dots p_0 q_1 \dots p_1 q_2 \dots p_{n-1} q_n \dots p_n$ , woraus  $w \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$  folgt.  $\square$

Statt eine Art  $\varepsilon$ -Abschluss den Transitionen der Übergangsfunktion anzuschließen wie im vorangegangenen Beweis, können bei der Konstruktion eines NFA aus einem  $\varepsilon$ -NFA auch alternative Definitionen von  $\delta'$  genutzt werden mit entsprechenden Anpassungen der Anfangs- und Endzustandsmengen  $Q'_0$  und  $F'$ .

Dem in Abbildung 15 angegebenen  $\varepsilon$ -NFA  $\mathcal{M}$  entspricht der gewöhnliche NFA, der aus  $\mathcal{M}$  entsteht, indem die  $\varepsilon$ -Transition gelöscht wird und stattdessen Zustand  $q_1$  als weiterer Anfangszustand deklariert wird. Es ergibt sich folgender NFA:



Ein weiteres Beispiel für die Transformation “NFA  $\mathcal{M}$  mit  $\varepsilon$ -Transitionen  $\rightsquigarrow$  NFA  $\mathcal{M}'$ ” ist in Abbildung 16 angegeben. Hier ist die Menge der Anfangszustände im NFA  $\mathcal{M}'$  durch die Menge von Anfangszuständen  $\{q_0, q_1, q_2\}$  gegeben. Weiter gibt es in  $\mathcal{M}'$  z.B. einen  $a$ -Übergang von  $q_1$  nach  $q_2$ . Dieser ergibt sich aus den Transitionen

$$q_1 \xrightarrow{a} q_4 \xrightarrow{\varepsilon} q_2$$

in  $\mathcal{M}$ . Daher gilt  $q_2 \in \delta'(q_1, a)$ .

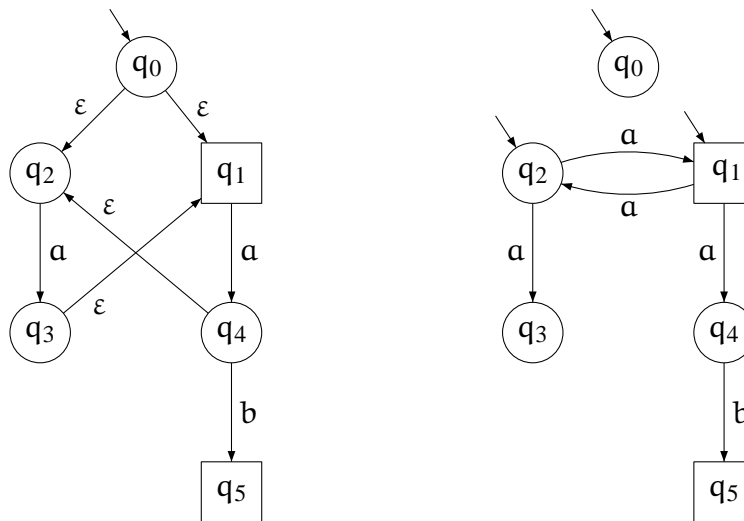


Figure 16:  $\varepsilon$ -NFA  $\mathcal{M} \rightsquigarrow$  NFA  $\mathcal{M}'$

Die Erweiterung von  $\varepsilon$ -NFA ermöglicht recht einfache Realisierungen von Konkatination und Kleeneabschluss. In beiden Fällen gehen wir von  $\varepsilon$ -NFA  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  bzw.  $\mathcal{M}$  für gegebene reguläre Sprachen  $L_1$  und  $L_2$  bzw.  $L$  aus und konstruieren einen  $\varepsilon$ -NFA für  $L_1 \circ L_2$  bzw.  $L^*$ . Der resultierende  $\varepsilon$ -NFA kann dann mit der im Beweis von Lemma 2.22 (Seite 39) angegebenen Methode zu einem gewöhnlichen NFA transformiert werden.

**Konkatination.** Seien  $\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, Q_{0,1}, F_1)$  und  $\mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, Q_{0,2}, F_2)$  zwei  $\varepsilon$ -NFA. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ . Der  $\varepsilon$ -NFA

$$\mathcal{M}_1 \circ \mathcal{M}_2 = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta, Q_{0,1}, F_2)$$

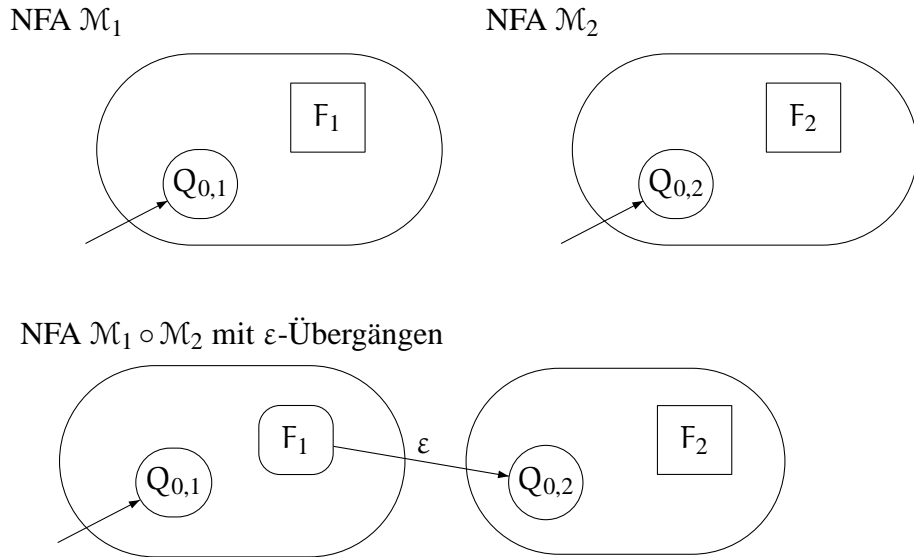


Figure 17: Idee für den Konkatenationsoperator für NFA

verbindet die Endzustände von  $\mathcal{M}_1$  mit den Anfangszuständen von  $\mathcal{M}_2$  durch einen  $\epsilon$ -Übergang. Siehe Abbildung 17. Wir formalisieren dies durch folgende Definition der Übergangsfunktion  $\delta$ :

$$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & : \text{ falls } q \in Q_1 \text{ und } a \in \Sigma \\ \delta_2(q, a) & : \text{ falls } q \in Q_2 \text{ und } a \in \Sigma \\ Q_{0,2} \cup \delta_1(q, \epsilon) & : \text{ falls } q \in F_1 \\ \delta_1(q, \epsilon) & : \text{ falls } q \in Q_1 \setminus F_1 \\ \delta_2(q, \epsilon) & : \text{ falls } q \in Q_2 \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, dass tatsächlich  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_1 \circ \mathcal{M}_2)$  mit der Sprache  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_1)\mathcal{L}(\mathcal{M}_2)$  übereinstimmt.

**Kleeneabschluss.** Sei  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$  ein NFA mit oder ohne  $\epsilon$ -Transitionen. Wir definieren einen  $\epsilon$ -NFA  $\mathcal{M}^*$  für die Sprache  $\mathcal{L}(\mathcal{M})^*$  basierend auf der Idee, dass wir in allen Endzuständen von  $\mathcal{M}$  mit einer  $\epsilon$ -Transition zu einem Anfangszustand von  $\mathcal{M}$  zurücksetzen können. Siehe Abbildung 18. Die formale Definition von  $\mathcal{M}^*$  ist wie folgt:

$$\mathcal{M}^* \stackrel{\text{def}}{=} (Q \cup \{q_\epsilon\}, \Sigma, \delta^*, Q_0 \cup \{q_\epsilon\}, F \cup \{q_\epsilon\}),$$

wobei  $q_\epsilon \notin Q$  ein neuer Zustand ist, der zugleich als Anfangs- und Endzustand von  $\mathcal{M}^*$  deklariert wird. Die Übergangsfunktion  $\delta^*$  von  $\mathcal{M}^*$  verbindet die Endzustände von  $\mathcal{M}$  über einen  $\epsilon$ -Übergang mit den Anfangszuständen von  $\mathcal{M}$ . Falls  $a \in \Sigma$  und  $q \in Q$ , so ist  $\delta^*(q, a) = \delta(q, a)$ . Die  $\epsilon$ -Transitionen der Zustände  $q \in Q$  sind durch

$$\delta^*(q, \epsilon) = \begin{cases} Q_0 \cup \delta(q, \epsilon) & : \text{ falls } q \in F \\ \delta(q, \epsilon) & : \text{ falls } q \in Q \setminus F \end{cases}$$

gegeben. Zustand  $q_\epsilon$  hat keine ausgehenden Transitionen, d.h.,  $\delta^*(q_\epsilon, a) = \emptyset$  für alle  $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ . Der Spezialzustand  $q_\epsilon$  wird benötigt, um sicherzustellen, dass das leere Wort akzeptiert

wird. Man kann auf  $q_\varepsilon$  verzichten, falls  $\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ . Es ist leicht zu sehen, dass  $\mathcal{L}(\mathcal{M}^*) = \mathcal{L}(\mathcal{M})^*$ .