Reguläre Grammatik $\rightsquigarrow$ NFA

Sei $G = (V, \Sigma, \mathcal{P}, S)$ eine reguläre Grammatik.

Definiere NFA $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ wie folgt:

Zustandsraum	Q	$=$	$V \cup \{q_F\}$
Startzustandsmenge	Q_0	$=$	$\{S\}$
Endzustandsmenge	F	$=$	$\{q_F\} \cup \{ A \in V : A \to \varepsilon \}$

Übergangsfunktion: für $A, B \in V$, $a \in \Sigma$

$$B \in \delta(A, a) \quad \Leftrightarrow \quad A \to aB \quad \text{Regel in } G$$

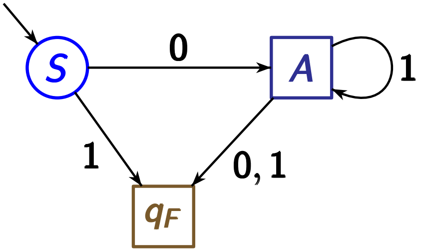
$$q_F \in \delta(A, a) \quad \Leftrightarrow \quad A \to a \quad \text{Regel in } G$$

Beispiel: reguläre Grammatik $\rightsquigarrow$ NFA

reguläre Grammatik G:

$$
\begin{aligned}
S &\to 1 \mid 0A \\
A &\to 0 \mid 1 \mid 1A \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

zugehöriger NFA:



Sei L eine Sprache. Dann gilt:

L ist regulär, d.h.,

$L = \mathcal{L}(G)$ für eine reguläre Grammatik G

gdw $L = \mathcal{L}(\mathcal{M})$ für einen **NFA** $\mathcal{M}$

gdw $L = \mathcal{L}(\mathcal{M})$ für einen **DFA** $\mathcal{M}$

Vereinigungsoperator für NFA

gegeben: zwei NFA $\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, Q_{0,1}, F_1)$

$\mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, Q_{0,2}, F_2)$

o.E. $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$

NFA $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \uplus \mathcal{M}_2 = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$, wobei

- Zustandsraum $Q = Q_1 \cup Q_2$
- Anfangszustände $Q_0 = Q_{0,1} \cup Q_{0,2}$
- Endzustände $F = F_1 \cup F_2$
- Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$

$$\boxed{\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & \text{falls} \quad q \in Q_1 \\ \delta_2(q,a) & \text{falls} \quad q \in Q_2 \end{cases}}$$

Produktautomat für NFA

gegeben: zwei NFA
$$\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, Q_{0,1}, F_1)$$
$$\mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, Q_{0,2}, F_2)$$

Produktautomat: NFA $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$

- Zustandsraum $Q = Q_1 \times Q_2$
- Anfangszustandsmenge $Q_0 = Q_{0,1} \times Q_{0,2}$
- Endzustandsmenge $F = F_1 \times F_2$
- Alphabet Σ
- Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$

$$\delta(\langle q_1, q_2 \rangle, a) = \left\{ \langle p_1, p_2 \rangle : \begin{array}{l} p_1 \in \delta_1(q_1, a), \\ p_2 \in \delta_2(q_2, a) \end{array} \right\}$$

Produktautomat für DFA

gegeben: zwei DFA $\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{0,1}, F_1)$
$\mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{0,2}, F_2)$

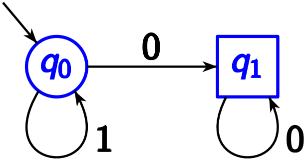
Produktautomat: DFA $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$

- Zustandsraum $Q = Q_1 \times Q_2$
- Anfangszustand $q_0 = \langle q_{0,1}, q_{0,2} \rangle$
- Endzustandsmenge $F = F_1 \times F_2$
- Alphabet Σ
- Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \to Q$

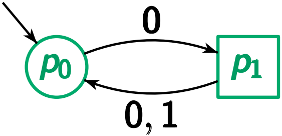
$$\delta(\langle q_1, q_2 \rangle, a) = \begin{cases} \langle p_1, p_2 \rangle & : \text{ falls } \; p_1 = \delta_1(q_1, a) \neq \bot \\ & \text{ und } \; p_2 = \delta_2(q_2, a) \neq \bot \\ \bot & : \text{ sonst} \end{cases}$$

Beispiel: Produkt-DFA

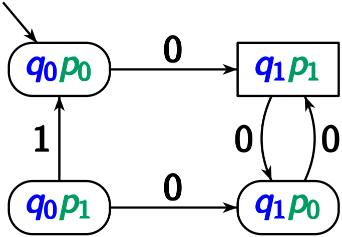
DFA $\mathcal{M}_1$



DFA $\mathcal{M}_2$



Produktautomat: DFA $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$



akzeptierte Sprache:

$$\{0^k : k \text{ ungerade }\}$$

$$= \mathcal{L}(\mathcal{M}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{M}_2)$$

Korrektheit des Produktautomaten

gegeben: zwei NFA

$$\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, Q_{0,1}, F_1)$$
$$\mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, Q_{0,2}, F_2)$$

Produkt-NFA $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$

- Zustandsraum $Q = Q_1 \times Q_2$
- Anfangszustände $Q_0 = Q_{0,1} \times Q_{0,2}$
- Endzustände $F = F_1 \times F_2$
- Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$:

$$\delta(\langle q_1, q_2 \rangle, a) = \{ \langle p_1, p_2 \rangle : p_1 \in \delta_1(q_1, a), \; p_2 \in \delta_2(q_1, a) \}$$

$$\boxed{\text{zeige:} \quad \mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{M}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{M}_2)}$$

Komplementoperator für DFA

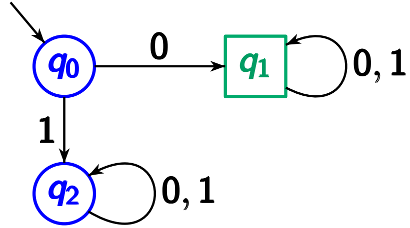
gegeben: DFA $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
mit totaler Übergangsfunktion δ

Komplement-DFA $\overline{\mathcal{M}} = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$

- Zustandsraum $Q' = Q$
- Alphabet Σ
- Übergangsfunktion $\delta' = \delta$
- Anfangszustand $q_0' = q_0$
- Endzustände $F' = Q \setminus F$

Korrektheit: $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}}) = \overline{\mathcal{L}(\mathcal{M})}$

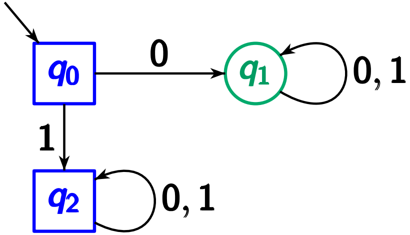
DFA $\mathcal{M}$ mit totaler Übergangsfunktion



akzeptierte Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{M})$

$$\{\, 0w \; : \; w \in \{0,1\}^* \,\}$$

Komplement-DFA $\overline{\mathcal{M}}$



akzeptierte Sprache $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}})$

$$\{\varepsilon\} \cup \{\, 1w \; : \; w \in \{0,1\}^* \,\}$$

$$= \; \{0,1\}^* \setminus \mathcal{L}(\mathcal{M})$$

gegeben: zwei DFA $\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, Q_{0,1}, F_1)$

$\mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, Q_{0,2}, F_2)$

mit totalen Übergangsfunktionen

Produkt-DFA $\mathcal{M} = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, \langle q_{0,1}, q_{0,2} \rangle, F)$

Übergangsfkt.: $\delta(\langle q_1, q_2 \rangle, a) = \langle \delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a) \rangle$

Endzustandsmenge für Durchschnitt:

$$F = \{ \langle q_1, q_2 \rangle : q_1 \in F_1 \text{ und } q_2 \in F_2 \}$$

Endzustandsmenge für Vereinigung:

$$F = \{ \langle q_1, q_2 \rangle : q_1 \in F_1 \text{ oder } q_2 \in F_2 \}$$

Die Klasse der regulären Sprachen ist abgeschlossen unter:

- Vereinigung $\longleftarrow$ disjunkte Vereinigung (NFA) oder Produkt (DFA)
- Durchschnitt $\longleftarrow$ Produkt (NFA/DFA)
- Komplement $\longleftarrow$ Komplementoperator (DFA)
- Konkatenation
- Kleeneabschluss

$\Big\}\longleftarrow$ via NFA mit ε-Transitionen

Beweis mit Hilfe von entsprechenden Operatoren auf endlichen Automaten (DFA, NFA)

NFA mit ε-Transitionen, kurz ε-NFA

$\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ wie NFA, aber

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$$

akzeptierte Sprache: $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ = Menge aller Wörter $w \in \Sigma^*$, für die es einen akzeptierenden Lauf gibt

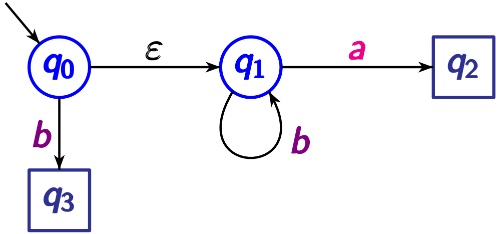
$\uparrow$

d.h., Zustandsfolge $q_0\, q_1 \ldots q_m$, so dass

1. $q_0 \in Q_0$
2. $q_m \in F$
3. $q_{i+1} \in \delta(q_i, b_{i+1})$, $\quad i = 0, 1, \ldots, m-1$

wobei $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $w = b_1\, b_2 \ldots b_m$

Beispiel: ε-NFA

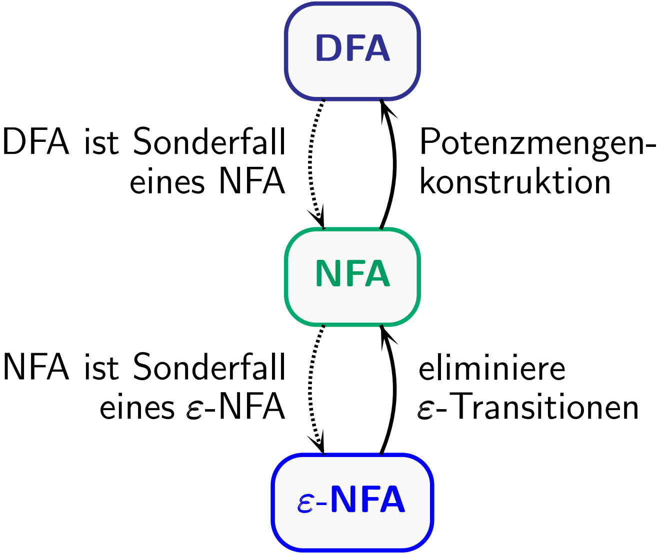


z.B.: akzeptierender Lauf für $b\,b\,a \;=\; \varepsilon\, b\, b\, a$:

$$\begin{array}{ccccccccc} q_0 & & q_1 & & q_1 & & q_1 & & q_2 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & \varepsilon & & b & & b & & a & \end{array}$$

$$\boxed{\text{akzeptierte Sprache:} \quad \{b\} \cup \{\, b^n a \;:\; n \geqslant 0 \,\}}$$

DFA, NFA und ε-NFA



$$\begin{array}{rcll} \varepsilon\text{-NFA } \mathcal{M} & = & (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F) & \text{mit } \varepsilon\text{-Transitionen} \\ \Downarrow & & & \\ \text{NFA } \mathcal{M}' & = & (Q', \Sigma, \delta', Q'_0, F') & \text{ohne } \varepsilon\text{-Transitionen} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} Q' & = & Q \\ Q'_0 & = & \{\, p \in Q : q_0 \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow} p \text{ für ein } q_0 \in Q_0 \,\} \end{array}}$$

$\overset{\varepsilon}{\Longrightarrow}$ reflexive, transitive Hülle von $\overset{\varepsilon}{\longrightarrow}$, d.h.,

$q \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow} p$ gdw es gibt eine Zustandsfolge $p_0\, p_1 \ldots p_n$

mit $q = p_0 \overset{\varepsilon}{\longrightarrow} p_1 \overset{\varepsilon}{\longrightarrow} \ldots \overset{\varepsilon}{\longrightarrow} p_n = p$ und $n \geqslant 0$

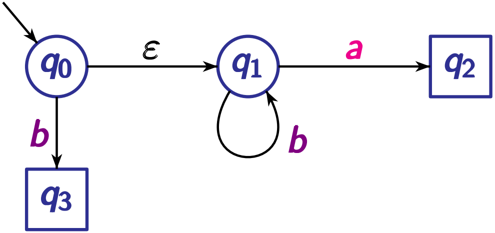
insbesondere: $q \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow} q$ für alle Zustände q

$$\begin{array}{lcll}
\varepsilon\text{-NFA } \mathcal{M} & = & (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F) & \text{mit } \varepsilon\text{-Transitionen} \\
\quad\Downarrow & & & \\
\text{NFA } \mathcal{M}' & = & (Q', \Sigma, \delta', Q_0', F') & \text{ohne } \varepsilon\text{-Transitionen}
\end{array}$$

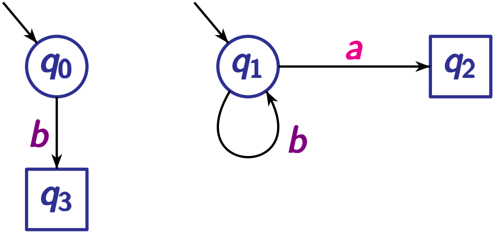
$$\boxed{\begin{array}{lcl}
Q' & = & Q \\
Q_0' & = & \{\, p \in Q : q_0 \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow} p \text{ für ein } q_0 \in Q_0 \,\} \\
F' & = & F \\
\delta'(q, a) & = & \{\, p \in Q : q \xrightarrow{a} r \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow} p \text{ für ein } r \in Q \,\}
\end{array}}$$

Korrektheit: $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{M}')$

Beispiel: ε-NFA



äquivalenter NFA ohne ε-Transitionen:



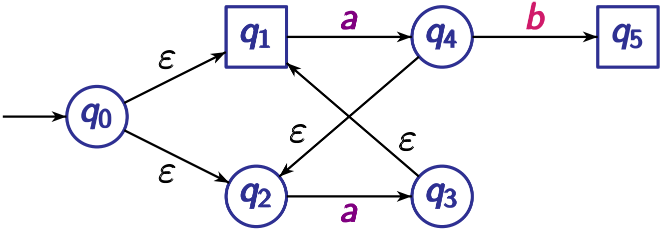
$Q_0' = \{q_0, q_1\}$

da $\quad q_0 \in Q_0$

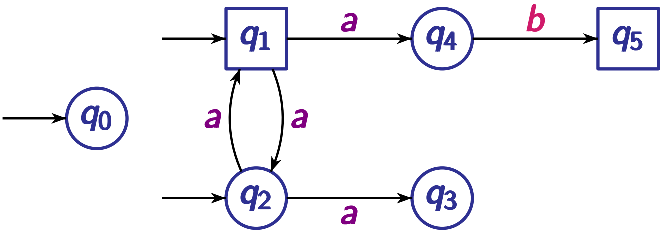
$q_0 \xRightarrow{\varepsilon} q_1$

Beispiel: ε-NFA $\rightsquigarrow$ NFA

ε-NFA $\mathcal{M}$



NFA $\mathcal{M}'$



akzeptierte Sprache: $\{a^n : n \geqslant 0\} \cup \{a^n b : n \geqslant 1\}$

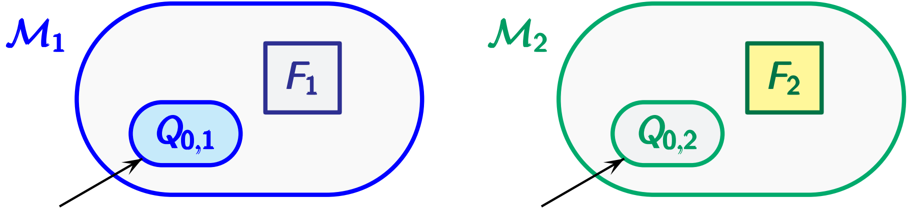
Die Klasse der regulären Sprachen ist abgeschlossen unter:

- Vereinigung ⟵ disjunkte Vereinigung (NFA) oder Produkt (DFA)
- Durchschnitt ⟵ Produkt (NFA/DFA)
- Komplement ⟵ Komplementoperator (DFA)
- Konkatenation
- Kleeneabschluss

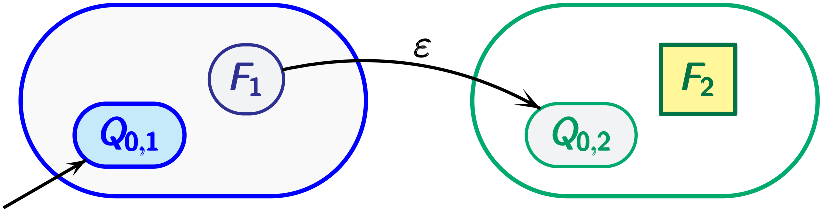
} ⟵ via ε-NFA

Beweis mit Hilfe von entsprechenden Operatoren auf endlichen Automaten (DFA, NFA)

Konkatenation für ε-NFA



ε-NFA für $\mathcal{L}(\mathcal{M}_1)\,\mathcal{L}(\mathcal{M}_2)$:



gegeben: zwei ε-NFA

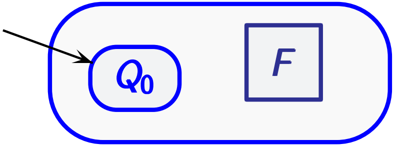
$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, Q_{0,1}, F_1) \\ \mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, Q_{0,2}, F_2) \end{array}\right\} \text{ o.E. } Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$$

ε-NFA:

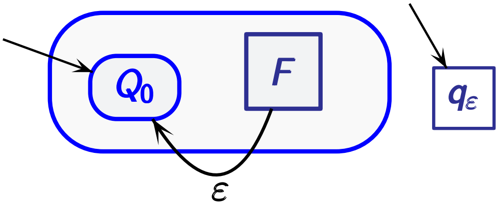
$$\mathcal{M}_1 \circ \mathcal{M}_2 = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta, Q_{0,1}, F_2)$$

für $q \in Q_1$, $a \in \Sigma$:	$\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$
für $q \in Q_2$, $a \in \Sigma$:	$\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$
für $q \in F_1$:	$\delta(q, \varepsilon) = Q_{0,2} \cup \delta_1(q, \varepsilon)$
für $q \in Q_1 \setminus F_1$:	$\delta(q, \varepsilon) = \delta_1(q, \varepsilon)$
für $q \in Q_2$:	$\delta(q, \varepsilon) = \delta_2(q, \varepsilon)$

gegeben: ε-NFA $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$



ε-NFA $\mathcal{M}^*$ für $\mathcal{L}(\mathcal{M})^*$:



Übergangsfkt. δ^* erweitert δ um ε-Transitionen von allen End- zu allen Anfangszuständen

$$\mathcal{M}^* = (Q \cup \{q_\varepsilon\}, \Sigma, \delta^*, Q_0 \cup \{q_\varepsilon\}, F \cup \{q_\varepsilon\})$$