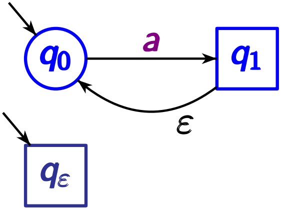
Beispiel: Konkatenation, Kleeneabschluss

NFA $\mathcal{M}$:

$L = \{a\}$

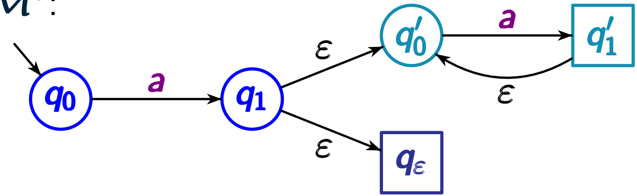
ε-NFA $\mathcal{M}^*$:



$L^* = \{a^n : n \geqslant 0\}$

$L^+ = \{a^n : n \geqslant 1\}$

ε-NFA $\mathcal{M} \circ \mathcal{M}^*$:

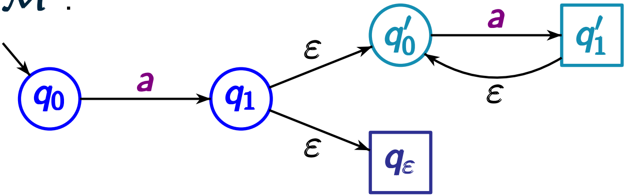


Beispiel: Plusoperator für NFA

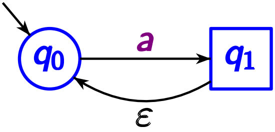
NFA $\mathcal{M}$:

$L = \{a\}$

ε-NFA $\mathcal{M} \circ \mathcal{M}^*$:



ε-NFA $\mathcal{M}^+$:



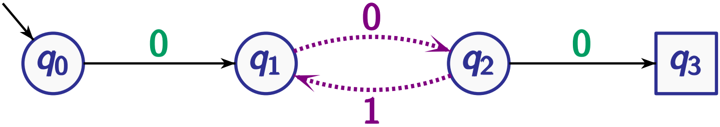
$L^+ = \{a^n : n \geqslant 1\}$

Operatoren auf endlichen Automaten

	FA	# Zustände
Vereinigung	NFA: $\mathcal{M}_1 \uplus \mathcal{M}_2$ DFA: modifiziertes Produkt	$\lvert\mathcal{M}_1\rvert + \lvert\mathcal{M}_2\rvert$ $\lvert\mathcal{M}_1\rvert \cdot \lvert\mathcal{M}_2\rvert$
Durchschnitt	NFA oder DFA	$\lvert\mathcal{M}_1\rvert \cdot \lvert\mathcal{M}_2\rvert$
Konkatenation	ε-NFA $\mathcal{M}_1 \circ \mathcal{M}_2$	$\lvert\mathcal{M}_1\rvert + \lvert\mathcal{M}_2\rvert$
Kleene-abschluss	ε-NFA $\mathcal{M}^*$	$\lvert\mathcal{M}\rvert + 1$
Komplement	totaler DFA: $\overline{\mathcal{M}}$ NFA: via Potenz-mengenkonstruktion	$\lvert\mathcal{M}\rvert$ $2^{\lvert\mathcal{M}\rvert}$

Beispiel zur "Pump-Eigenschaft" 1211

DFA $\mathcal{M}$:



Jedes Wort $z \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ der Länge $|z| \geqslant 4$ hat die Form

$$z = 001w, \quad \text{wobei } w = (01)^m 00 \text{ für ein } m \geqslant 0$$

und alle Wörter der Form

$$0(01)^k w = 0(01)^{k+m}00, \quad \text{wobei } k \geqslant 0,$$

liegen in $\mathcal{L}(\mathcal{M})$.

Pumping Lemma für reguläre Sprachen

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache.

Dann gibt es eine ganze Zahl $n \geqslant 1$, so dass sich jedes Wort $z \in L$ der Länge $|z| \geqslant n$ wie folgt zerlegen lässt:

$$z = uvw,$$

so dass folgende drei Eigenschaften gelten:

(1) $uv^kw = u\underbrace{vv\ldots v}_{k\text{-mal}}w \in L$ für alle $k \in \mathbb{N}$

(2) $v \neq \varepsilon$

(3) $|uv| \leqslant n$

Die Sprache $L = \{ a^n b^n : n \geqslant 0 \}$ ist nicht regulär.

Beweis: Angenommen L ist regulär.

Sei n die Konstante aus dem Pumping Lemma.

Das Wort $a^n b^n \in L$ hat die Länge $2n > n$, kann also zerlegt werden in: $a^n b^n = uvw$, so dass

(1) $uv^k w \in L$ für alle $k \in \mathbb{N}$

(2) $v \neq \varepsilon$

(3) $|uv| \leqslant n$

Wegen (3) bestehen u und v aus lauter a's, etwa

$$v = a^j, \quad \text{wobei } j \geqslant 1 \quad \text{(wegen (2))}$$

Dann gilt $uv^2 w = a^{n+j} b^n \notin L$. Widerspruch zu (1).

Die Sprache $L \; = \; \{ \, a^n b^n \; : \; n \geqslant 0 \, \}$ ist nicht regulär,

aber: $L' = \{ a^n b^m : \, n, m \geqslant 0 \}$ ist regulär.

Die Sprache

$$K \;=\; \{ \, w \in \{a, b\}^* \; : \; \#(a, w) \;=\; \#(b, w) \, \}$$

ist nicht regulär.

Beweis: Angenommen K ist regulär. Dann wäre auch folgende Sprache regulär:

$$K \cap \{a^n b^m : n, m \geqslant 0\} \;=\; \{a^n b^m : n = m\} \;=\; L$$

Widerspruch

Das Wortproblem für NFA

gegeben: NFA $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, \ldots)$, Wort $w \in \Sigma^*$
gefragt: gilt $w \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$?

on-the-fly Konstruktion des relevanten Teils des DFA

alternatives Verfahren:

Konstruiere einen DFA $\mathcal{M}_w$ mit $\mathcal{L}(\mathcal{M}_w) = \{w\}$.

Prüfe, ob $\mathcal{L}(\mathcal{M}_w) \cap \mathcal{L}(\mathcal{M}) \neq \varnothing$

$\uparrow$

Nicht-Leerheitstest für den Produkt-NFA

"gilt $\mathcal{L}(\mathcal{M}_w \otimes \mathcal{M}) \neq \varnothing$?"

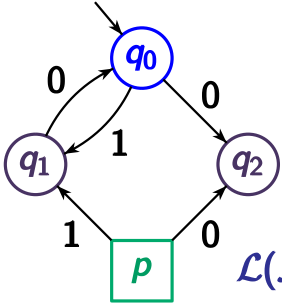
Leerheitstest für NFA

gegeben: NFA $\mathcal{M}$

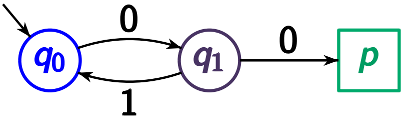
gefragt: gilt $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \varnothing$?

Leerheitstest:

> prüfe, ob es einen Anfangszustand q_0 und einen Endzustand p gibt, so dass p von q_0 erreichbar ist



$\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \varnothing$



Pfad $q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{0} p$

also: $00 \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$

Universalitätsproblem für FA

gegeben: endlicher Automat $\mathcal{M}$ mit Alphabet Σ

gefragt: gilt $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \Sigma^*$?

Reduktion auf das Leerheitsproblem:

$$
\begin{array}{lrcl}
 & \mathcal{L}(\mathcal{M}) & = & \Sigma^* \\
\text{gdw} & \overline{\mathcal{L}(\mathcal{M})} & = & \Sigma^* \setminus \mathcal{L}(\mathcal{M}) = \varnothing \\
\text{gdw} & \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{M}}) & = & \varnothing
\end{array}
$$

Algorithmus: konstruiere einen FA $\widetilde{\mathcal{M}}$ für $\overline{\mathcal{L}(\mathcal{M})}$
und wende Leerheitstest auf $\widetilde{\mathcal{M}}$ an

Realisierung für DFA: Graphanalyse in $\mathcal{M}$ (statt $\widetilde{\mathcal{M}}$)

Kosten des Universalitätstests für FA

gegeben: endlicher Automat $\mathcal{M}$ mit Alphabet Σ

gefragt: gilt $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \Sigma^*$?

Reduktion auf das Leerheitsproblem:

$$
\begin{array}{lrcl}
 & \mathcal{L}(\mathcal{M}) & = & \Sigma^* \\
\text{gdw} & \overline{\mathcal{L}(\mathcal{M})} & = & \Sigma^* \setminus \mathcal{L}(\mathcal{M}) = \varnothing \\
\text{gdw} & \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{M}}) & = & \varnothing
\end{array}
$$

für DFA: in Zeit $\mathcal{O}\big(\mathit{size}(\mathcal{M})\big)$ lösbar

für NFA: via Potenzmengenkonstruktion
in Zeit $\mathcal{O}\big(\mathbf{exp}(\mathit{size}(\mathcal{M}))\big)$ lösbar

Inklusionsproblem für DFA

gegeben: zwei DFA $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ über demselben Alphabet Σ $\longleftarrow$ $\boxed{\mathcal{M}_2 \text{ total}}$

gefragt: gilt $\mathcal{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{M}_2)$?

Reduktion auf das Leerheitsproblem:

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{M}_2) \\ \text{gdw} & \mathcal{L}(\mathcal{M}_1) \cap (\Sigma^* \setminus \mathcal{L}(\mathcal{M}_2)) = \varnothing \\ \text{gdw} & \mathcal{L}(\mathcal{M}_1) \cap \mathcal{L}(\overline{\mathcal{M}_2}) = \varnothing \\ \text{gdw} & \mathcal{L}(\mathcal{M}_1 \otimes \overline{\mathcal{M}_2}) = \varnothing \end{array}$$

Kosten: $\mathcal{O}(\mathit{size}(\mathcal{M}_1) \cdot \mathit{size}(\mathcal{M}_2))$

Äquivalenzproblem für FA

gegeben: zwei endliche Automaten $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ über demselben Alphabet Σ

gefragt: gilt $\mathcal{L}(\mathcal{M}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{M}_2)$?

Äquivalenztest mit Hilfe eines Inklusionstests:

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{M}_2) \quad \text{gdw} \quad \begin{array}{c} \mathcal{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{M}_2) \\ \text{und} \\ \mathcal{L}(\mathcal{M}_2) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{M}_1) \end{array}$$

für DFA: Kosten $\mathcal{O}\big(\mathit{size}(\mathcal{M}_1) \cdot \mathit{size}(\mathcal{M}_2)\big)$

für NFA: lösbar via Potenzmengenkonstruktion

Endlichkeitsproblem für FA

gegeben: endlicher Automat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$

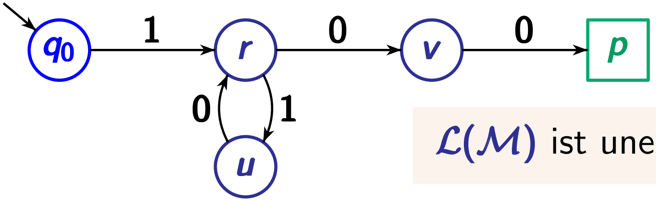
gefragt: ist $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ endlich **?**

Endlichkeitstest mittels Graphalgorithmen:

$\mathcal{L}(\mathcal{M})$ ist unendlich

gdw es gibt $q_0 \in Q_0$, $p \in F$, $r \in Q$, so dass

$$q_0 \longrightarrow^* r \longrightarrow^+ r \longrightarrow^* p$$



$\mathcal{L}(\mathcal{M})$ ist unendlich