

Für jeden Zustand q berechne regulären Ausdruck α_q für

$$L_q = \{ w \in \Sigma^* : \text{es gibt ein } p \in F \text{ mit } q \xrightarrow{w} p \}$$

für $q \in Q \setminus F$:

$$\alpha_q \equiv \sum_{a \in \Sigma} \sum_{r \in \delta(q, a)} a \alpha_r$$

für $q \in F$:

$$\alpha_q \equiv \sum_{a \in \Sigma} \sum_{r \in \delta(q, a)} a \alpha_r + \varepsilon$$

regulärer Ausdruck
für NFA \mathcal{M} :

$$\alpha = \sum_{q \in Q_0} \alpha_q$$

Für alle regulären Ausdrücke α, β, γ gilt:

aus $\alpha \equiv \beta\alpha + \gamma$ und $\varepsilon \notin \mathcal{L}(\beta)$ folgt $\alpha \equiv \beta^*\gamma$

↑
Äquivalenz regulärer Ausdrücke
 $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ gdw $\mathcal{L}(\alpha_1) = \mathcal{L}(\alpha_2)$

Beweis der Korrektheit der Ersetzungsregel:

zeige, dass für alle Sprachen $L, K, H \subseteq \Sigma^*$ gilt:

Aus $L = KL \cup H$ und $\varepsilon \notin K$ folgt $L = K^*H$.

Für alle regulären Ausdrücke α, β, γ gilt:

Aus $\alpha \equiv \beta\alpha + \gamma$ und $\varepsilon \notin \mathcal{L}(\beta)$ folgt $\alpha \equiv \beta^*\gamma$.

Aus $\alpha \equiv \beta\alpha + \varepsilon$ und $\varepsilon \notin \mathcal{L}(\beta)$ folgt $\alpha \equiv \beta^*$.

Aus $\alpha \equiv \beta\alpha$ und $\varepsilon \notin \mathcal{L}(\beta)$ folgt $\alpha \equiv \emptyset$.

Sonderfall $\gamma = \emptyset$

Beispiele:

$\alpha \equiv (aa + b)\alpha + c^* \implies \alpha \equiv (aa + b)^* c^*$

$\alpha \equiv (aa + b)\alpha + \varepsilon \implies \alpha \equiv (aa + b)^* \varepsilon$

$\alpha \equiv (aa + b)\alpha \implies \alpha \equiv \emptyset$

Sei $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ ein NFA.

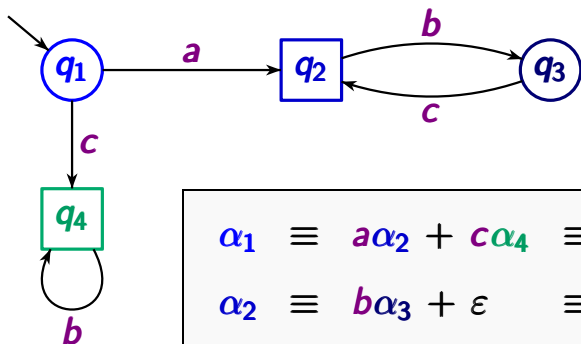
1. Schritt: Vorverarbeitung mit Graphalgorithmen
2. Schritt: Erstellung des Gleichungssystems

$$\alpha_q \equiv \sum_{a \in \Sigma} \sum_{p \in \delta(q, a)} a \alpha_p \quad \text{für } q \in Q \setminus F$$

$$\alpha_q \equiv \sum_{a \in \Sigma} \sum_{p \in \delta(q, a)} a \alpha_p + \varepsilon \quad \text{für } q \in F$$

3. Schritt: Lösen des Gleichungssystems durch sukzessives Anwenden der Ersetzungsregel

Aus $\alpha \equiv \beta \alpha + \gamma$ und $\varepsilon \notin \mathcal{L}(\beta)$ folgt $\alpha \equiv \beta^* \gamma$.



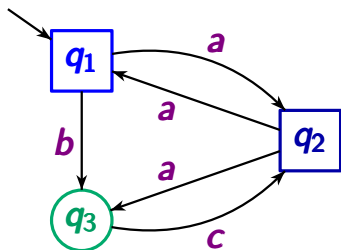
$$\alpha_1 \equiv a\alpha_2 + c\alpha_4 \equiv a(bc)^* + cb^*$$

$$\alpha_2 \equiv b\alpha_3 + \varepsilon \equiv (bc)^*$$

$$\alpha_3 \equiv c\alpha_2 \equiv c(bc)^*$$

$$\alpha_4 \equiv b\alpha_4 + \varepsilon \stackrel{\text{ER}}{\equiv} b^*$$

$$\alpha_2 \equiv b\alpha_3 + \varepsilon \equiv bc\alpha_2 + \varepsilon \stackrel{\text{ER}}{\equiv} (bc)^*$$



$$\begin{aligned} \alpha_1 &\equiv a\alpha_2 + b\alpha_3 + \varepsilon \\ \alpha_2 &\equiv a\alpha_1 + a\alpha_3 + \varepsilon \\ \alpha_3 &\equiv c\alpha_2 \end{aligned}$$

$$\alpha_1 \equiv (a + bc)\alpha_2 + \varepsilon$$

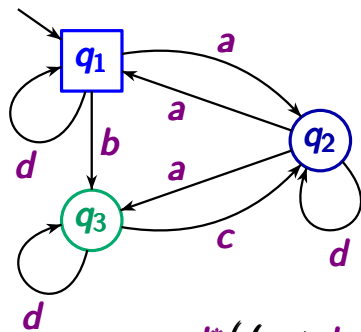
$$\equiv (a + bc)(a(a + bc) + ac)^*(a + \varepsilon) + \varepsilon$$

$$\alpha_2 \equiv (a(a + bc) + ac)^*(a + \varepsilon)$$

$$\alpha_3 \equiv c\alpha_2 \equiv c(a(a + bc) + ac)^*(a + \varepsilon)$$

Beispiel: Ersetzungsmethode

1825



$$\alpha_1 \equiv d\alpha_1 + a\alpha_2 + b\alpha_3 + \varepsilon$$

$$\alpha_2 \equiv a\alpha_1 + d\alpha_2 + a\alpha_3$$

$$\alpha_3 \equiv c\alpha_2 + d\alpha_3$$

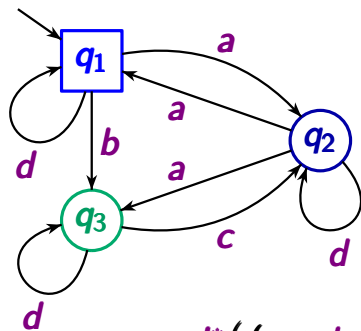
$$\alpha_1 \equiv d^*((a + bd^*c)\alpha_2 + \varepsilon) \quad \alpha_3 \equiv d^*c\alpha_2$$

$$\alpha_2 \equiv a\alpha_1 + d\alpha_2 + a\alpha_3$$

$$\equiv ad^*((a + bd^*c)\alpha_2 + \varepsilon) + d\alpha_2 + ad^*c\alpha_2$$

$$\equiv (ad^*(a + bd^*c) + d + ad^*c)\alpha_2 + ad^*$$

$$\stackrel{\text{ER}}{\equiv} (ad^*(a + bd^*c) + d + ad^*c)^* ad^*$$



$$\alpha_1 \equiv d\alpha_1 + a\alpha_2 + b\alpha_3 + \varepsilon$$

$$\alpha_2 \equiv a\alpha_1 + d\alpha_2 + a\alpha_3$$

$$\alpha_3 \equiv c\alpha_2 + d\alpha_3$$

$$\alpha_1 \equiv d^* \left((a + bd^*c) \alpha_2 + \varepsilon \right) \equiv \dots$$

$$\alpha_2 \equiv \left(ad^*(a + bd^*c) + d + ad^*c \right)^* ad^*$$

$$\alpha_3 \equiv d^*c \alpha_2$$

$$\equiv d^*c \left(ad^*(a + bd^*c) + d + ad^*c \right)^* ad^*$$

gegeben: NFA $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$

gesucht: regulärer Ausdruck α mit $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\mathcal{M})$

zwei Verfahren:

1. Ersetzungsmethode: berechne für jeden Zustand q einen regulären Ausdruck für die Sprache

$$L_q = \{ w \in \Sigma^* : \text{es gibt } p \in F \text{ mit } q \xrightarrow{w} p \}$$

2. dynamisches Programmieren: berechne für alle Zustandspaare (q, p) einen regulären Ausdruck für

$$L_{q,p} = \{ w \in \Sigma^* : q \xrightarrow{w} p \}$$

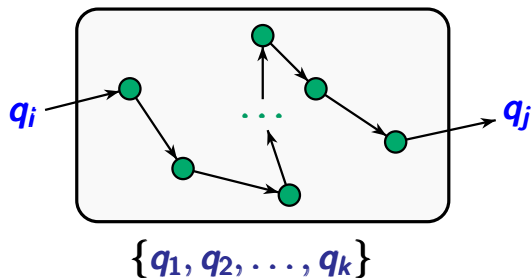
Konstruktion regulärer Ausdrücke für L_{q_i, q_j}

1847

Sei $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ ein NFA. Wähle eine feste Nummerierung der Zustände, etwa $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$.

Für $k = 0, 1, \dots, n$ berechne reguläre Ausdrücke

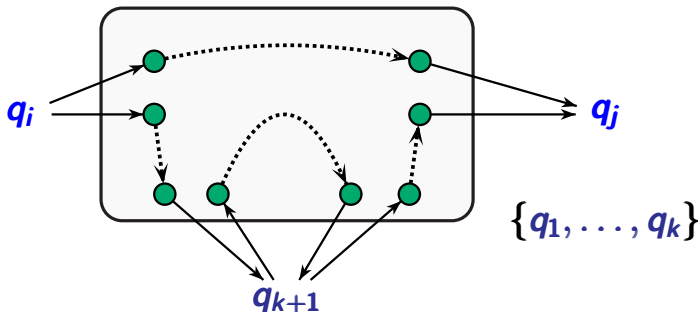
$\alpha^k[i, j]$ für $\left\{ \begin{array}{l} \text{Menge aller Wörter } w \in \Sigma^*, \text{ für die es} \\ \text{einen Lauf der Form } q_i p_1 \dots p_m q_j \text{ mit} \\ m \geq 0 \text{ und } p_1, \dots, p_m \in \{q_1, \dots, q_k\} \text{ gibt} \end{array} \right.$



$q_i \in \{p_1, \dots, p_m\}$
ist möglich,
falls $i \leq k$

$q_j \in \{p_1, \dots, p_m\}$
ist möglich,
falls $j \leq k$

$\alpha^{k+1}[i,j]$ für $\left\{ \begin{array}{l} \text{Menge aller Wörter } w \in \Sigma^*, \text{ für die es} \\ \text{einen Lauf } q_i p_1 \dots p_m q_j \text{ mit } m \geq 0 \\ \text{und } p_1, \dots, p_m \in \{q_1, \dots, q_{k+1}\} \text{ gibt} \end{array} \right.$



Definition von $\alpha^{k+1}[i,j]$:

$$\alpha^k[i,j] + \alpha^k[i,k+1] (\alpha^k[k+1,k+1])^* \alpha^k[k+1,j]$$

FOR $i, j = 1, \dots, n$ DO

sei $\{a \in \Sigma : q_j \in \delta(q_i, a)\} = \{a_1, \dots, a_r\}$

IF $i \neq j$ THEN $\alpha^0[i, j] := a_1 + \dots + a_r$

ELSE $\alpha^0[i, i] := a_1 + \dots + a_r + \varepsilon$

FI

OD

FOR $k = 0, 1, \dots, n-1$ DO

FOR $i, j = 1, \dots, n$ DO

$\alpha^{k+1}[i, j] := \alpha^k[i, j] +$

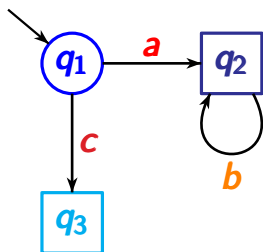
$\alpha^k[i, k+1](\alpha^k[k+1, k+1])^* \alpha^k[k+1, j]$

OD

OD

Beispiel: Berechnung der Ausdrücke $\alpha^k[i,j]$

1870

 $k = 0$

$$\alpha^0[1, 1] = \varepsilon$$

$$\alpha^0[2, 1] = \emptyset$$

$$\alpha^0[1, 2] = a$$

$$\alpha^0[2, 2] = b + \varepsilon$$

$$\alpha^0[1, 3] = c$$

$$\alpha^0[2, 3] = \emptyset$$

$$\dots \quad \alpha^0[3, j] \in \{\varepsilon, \emptyset\}$$

$k = 1$: syntaktische, aber keine semantischen
Veränderungen

$$k = 2: \alpha^2[1, 2] \equiv ab^* \quad \alpha^2[2, 2] \equiv b^*$$

$$\alpha^2[\dots] \equiv \alpha^1[\dots] \equiv \alpha^0[\dots] \text{ sonst}$$

$k = 3$: syntaktische, aber keine semantischen
Veränderungen

$$\begin{aligned} T(k) &= \text{minimale Länge der Ausdrücke } \alpha^k[i,j] \\ &= \min_{i,j} |\alpha^k[i,j]| \end{aligned}$$

Rekurrenz:

$$T(0) \geq 1$$

$$T(k+1) \geq 4 \cdot T(k) + 1$$

Zeige durch Induktion: $T(k) \geq 4^k$

$$\begin{aligned} \text{Rekurrenz: } \quad T(0) &\geq 1 \\ T(k+1) &\geq 4 \cdot T(k) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(k) &\geq 4 T(k-1) + 1 \\ &\geq 4^2 T(k-2) + 4 + 1 \\ &\geq 4^3 T(k-3) + 4^2 + 4 + 1 \\ &\geq 4^4 T(k-4) + 4^3 + 4^2 + 4 + 1 \\ &\vdots \\ &\geq 4^\ell T(k-\ell) + 4^{\ell-1} + \dots + 4^2 + 4 + 1 \\ &\qquad\qquad\qquad \text{für } \ell = 1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

$$T(k) \geq 4^k T(0) + 4^{k-1} + \dots + 4^2 + 4 + 1 \text{ für } \ell = k$$