

Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  eine Sprache.

Die Nerode-Äquivalenz  $\sim_L$  ist diejenige Äquivalenzrelation auf  $\Sigma^*$ , so dass für alle  $x, y \in \Sigma^*$  gilt:

$$x \sim_L y \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{für alle Wörter } z \in \Sigma^* \text{ gilt:} \\ xz \in L \text{ gdw } yz \in L \end{array} \right.$$

Äquivalenzklasse von  $x$ :  $[x]_L = \{y : x \sim_L y\}$

Quotientenraum:  $\Sigma^*/L = \{[x]_L : x \in \Sigma^*\}$

Nerode-Index von  $L = \text{Index von } \sim_L = |\Sigma^*/L|$   
= Anzahl an Äquivalenzklassen von  $\sim_L$

Sei  $L$  die reguläre Sprache  $\mathcal{L}(0^*1^*) = \{0^k1^n : k, n \geq 0\}$ .

- die Wörter  $0^k$ ,  $k \geq 0$ , sind paarweise  $\sim_L$ -äquivalent

$$0^k z \in L \text{ gdw } z \in L$$

- die Wörter  $0^k1^{n+1}$  sind paarweise  $\sim_L$ -äquivalent, wobei  $k, n \geq 0$ , z.B.

$$0^k1^{n+1} z \in L \text{ gdw } z = 1^\ell \text{ für ein } \ell \geq 0$$

- die Wörter in  $0^*1^*10(0+1)^*$  sind paarweise  $\sim_L$ -äquivalent

$$0^k1^{n+1}0z \notin L \text{ für alle } z \in \{0,1\}^*$$

Sei  $L$  die reguläre Sprache  $\mathcal{L}(0^*1^*) = \{0^k1^n : k, n \geq 0\}$ .

Der Quotientenraum  $\{0, 1\}^*/L$  besteht aus **drei** Äquivalenzklassen:

$$L_0 = \{0^k : k \geq 0\}$$

$$L_1 = \{0^k1^{n+1} : k, n \geq 0\}$$

$$L_2 = \{0^k1^{n+1}0^v : k, n \geq 0, v \in \{0, 1\}^*\}$$

Der Nerode-Index von  $L$  ist **3**.

Sei  $L = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ .

Für alle  $\ell, n \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq \ell \leq n$  gilt:

$$0^n 1^\ell \not\sim_L 0^{n+1} 1^\ell \quad 0^n 1^\ell \not\sim_L 0^n 1^{\ell+1}$$

Allgemein: für  $0 \leq \ell \leq n, 0 \leq k \leq m$  und  $n-\ell \neq m-k$

$$0^n 1^\ell \not\sim_L 0^m 1^k$$

Für  $0 \leq \ell \leq n, 0 \leq k \leq m$   
und  $n-\ell = m-k$  gilt:

$$0^n 1^\ell \sim_L 0^m 1^k$$

	$0^n 1^\ell z \in L$
gdw	$0^m 1^k z \in L$
gdw	$z = 1^{n-\ell} = 1^{m-k}$



... der leeren Sprache ?

D.h., wieviele Äquivalenzklassen gibt es unter  $\sim_{\emptyset}$  ?

Antwort: **1** ← alle Wörter sind  $\sim_{\emptyset}$ -äquivalent, da  
 $xz \notin \emptyset$  für alle  $x, z \in \Sigma^*$

... der Sprache  $\Sigma^*$  ?

D.h., wieviele Äquivalenzklassen gibt es unter  $\sim_{\Sigma^*}$  ?

Antwort: **1** ← alle Wörter sind  $\sim_{\Sigma^*}$ -äquivalent  
 $xz \in \Sigma^*$  für alle  $x, z \in \Sigma^*$

# Was ist der Nerode-Index von ... ?

2031

... der endlichen Sprache  $L = \{0, 1, 10, 11\}$  ?

Antwort: **4**

Nerode-Äquivalenzklassen: für  $x \in L_i, z \in \{0, 1\}^*$ :

$$L_1 = \{\varepsilon\} \quad \longleftarrow \quad xz \in L \text{ gdw } z \in L$$

$$L_2 = \{1\} \quad \longleftarrow \quad xz \in L \text{ gdw } z \in \{\varepsilon, 0, 1\}$$

$$L_3 = \{0, 10, 11\} \quad \longleftarrow \quad xz \in L \text{ gdw } z = \varepsilon$$

$$L_4 = \{0, 1\}^* \setminus (L_1 \cup L_2 \cup L_3) \quad \longleftarrow \quad xz \notin L$$

Sei  $L$  eine Sprache. Dann gilt:

$L$  ist regulär gdw  $\left\{ \begin{array}{l} \text{der Nerode-Index von } L \\ \text{ist endlich} \end{array} \right.$

zur Erinnerung:

Nerode-Index von  $L \hat{=} \text{Anzahl an Äquivalenzklassen unter } \sim_L, \text{ wobei}$

$x \sim_L y \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{für alle } z \in \Sigma^* \text{ gilt:} \\ xz \in L \text{ gdw } yz \in L \end{array} \right.$

Sei  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  ein DFA.

Die Relation  $\sim_{\mathcal{M}}$  ist diejenige Äquivalenzrelation auf  $\Sigma^*$ , so dass für alle Wörter  $x, y \in \Sigma^*$  gilt:

$$x \sim_{\mathcal{M}} y \quad \text{gdw} \quad \delta(q_0, x) = \delta(q_0, y)$$

zur Erinnerung: für  $w = a_1 a_2 \dots a_n \in \Sigma^*$ :

$\delta(q_0, w)$  = eindeutiger Zustand  $p$ , den  $\mathcal{M}$   
durch Lesen des Worts  $w$  erreicht

oder  $\delta(q_0, w) = \perp$  ←

$$q_0 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{i-1}} q_i \not\xrightarrow{a_i}$$

für ein  $i$  mit  $0 \leq i < n$

Sei  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  ein DFA.

Die Relation  $\sim_{\mathcal{M}}$  ist diejenige Äquivalenzrelation auf  $\Sigma^*$ , so dass für alle Wörter  $x, y \in \Sigma^*$  gilt:

$$x \sim_{\mathcal{M}} y \quad \text{gdw} \quad \delta(q_0, x) = \delta(q_0, y)$$

Äquivalenzklasse von  $x$ :  $[x]_{\mathcal{M}} = \{y \in \Sigma^* : x \sim_{\mathcal{M}} y\}$

Quotientenraum:  $\Sigma^*/\mathcal{M} = \{[x]_{\mathcal{M}} : x \in \Sigma^*\}$

Index von  $\mathcal{M} = \text{Index von } \sim_{\mathcal{M}} = |\Sigma^*/\mathcal{M}|$   
 $=$  Anzahl an Äquivalenzklassen von  $\sim_{\mathcal{M}}$

Sei  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  ein DFA.

Äquivalenzrelation  $\sim_{\mathcal{M}}$  auf  $\Sigma^*$ :

$$x \sim_{\mathcal{M}} y \quad \text{gdw} \quad \delta(q_0, x) = \delta(q_0, y)$$

Falls  $\delta$  total ist und alle Zustände  $q \in Q$  vom Anfangszustand  $q_0$  erreichbar sind, so gilt:

$$\Sigma^*/\mathcal{M} = \{ K_q : q \in Q \}$$

wobei  $K_q = \{ x \in \Sigma^* : \delta(q_0, x) = q \}$

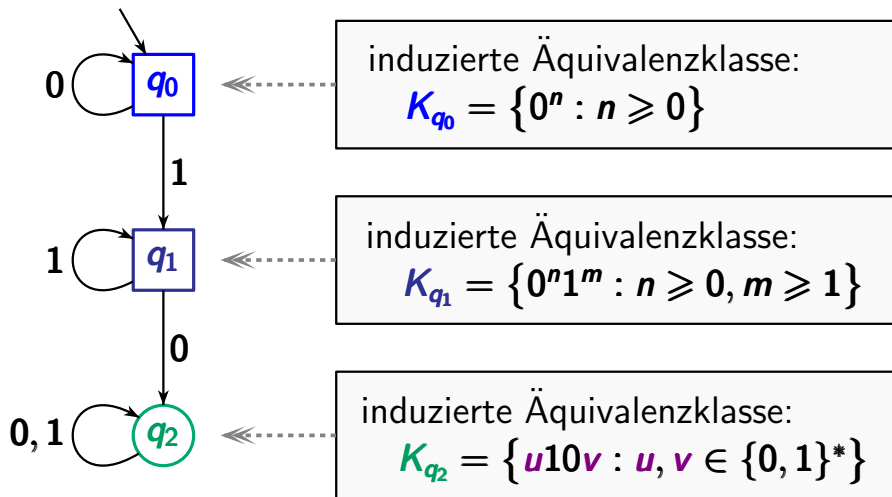
“jeder Zustand induziert eine DFA-Äquivalenzklasse”

# Beispiel zur Äquivalenz $\sim_{\mathcal{M}}$

2081

DFA  $\mathcal{M}$  für  $0^*1^*$ :

$$\{0, 1\}^*/\mathcal{M} = \{K_{q_0}, K_{q_1}, K_{q_2}\}$$



zwei Äquivalenzrelationen auf den Wörtern über einem Alphabet  $\Sigma$

- Nerode-Äquivalenz für Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$

$$x \sim_L y \quad \text{gdw} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für alle Wörter } z \in \Sigma^* \text{ gilt:} \\ xz \in L \Leftrightarrow yz \in L \end{array} \right.$$

- DFA-Äquivalenz für DFA  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

$$x \sim_{\mathcal{M}} y \quad \text{gdw} \quad \delta(q_0, x) = \delta(q_0, y)$$

Sei  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  ein DFA und  $L = \mathcal{L}(\mathcal{M})$ .

$\sim_{\mathcal{M}}$  ist feiner als  $\sim_L$ , d.h., für alle  $x, y \in \Sigma^*$  gilt:  
aus  $x \sim_{\mathcal{M}} y$  folgt  $x \sim_L y$

- jede DFA-Äquivalenzklasse ist in (genau) einer Nerode-Äquivalenzklasse enthalten
- jede Nerode-Äquivalenzklasse ist (disjunkte) Vereinigung von DFA-Äquivalenzklassen

für alle  $H \in \Sigma^*/L$  gibt es  $K_1, \dots, K_m \in \Sigma^*/\mathcal{M}$  mit  
 $H = K_1 \cup \dots \cup K_m$

Sei  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  ein DFA und  $L = \mathcal{L}(\mathcal{M})$ .

$\sim_{\mathcal{M}}$  ist feiner als  $\sim_L$ , d.h., für alle  $x, y \in \Sigma^*$  gilt:  
aus  $x \sim_{\mathcal{M}} y$  folgt  $x \sim_L y$

Daher gilt:  $|Q| = |\Sigma^*/\mathcal{M}| \geq |\Sigma^*/L|$



gilt für jeden DFA mit totaler Übergangsfunktion, sofern alle Zustände vom Anfangszustand erreichbar sind

Für DFA mit partieller Übergangsfunktion gilt:

$$|Q| + 1 \geq |\Sigma^*/\mathcal{M}|$$

Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  eine Sprache. Dann gilt:

$L$  ist regulär gdw  $\left\{ \begin{array}{l} \text{der Nerode-Index von } L \\ \text{ist endlich} \end{array} \right.$

Beweis von " $\implies$ ":

Ist  $L$  regulär, so ist  $L = \mathcal{L}(\mathcal{M})$  für einen DFA  $\mathcal{M}$ .

Wie eben gezeigt, gilt für den Nerode-Index:

$$|\Sigma^*/L| \leq |\Sigma^*/\mathcal{M}| < \infty$$

Nerode-Index  
von  $L$

Index  
von  $\sim_{\mathcal{M}}$

Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  eine Sprache. Dann gilt:

$L$  ist regulär gdw  $\left\{ \begin{array}{l} \text{der Nerode-Index von } L \\ \text{ist endlich} \end{array} \right.$

Beweis von " $\Leftarrow$ ":

Nehme an, dass  $|\Sigma^*/L| < \infty$ .

Konstruiere einen DFA  $\mathcal{M}_L$  für  $L$ , dessen Zustände die Äquivalenzklassen unter  $\sim_L$  repräsentieren

↑  
Minimalautomat für  $L$

Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  eine Sprache mit endlichem Nerode-Index .

Minimalautomat für  $L$ :

$$\text{DFA } \mathcal{M}_L = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

$$Q = \Sigma^*/L$$

$$q_0 = [\varepsilon]_L$$

$$F = \{ [x]_L : x \in L \}$$

Übergangsfunktion  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$

$$\delta([x]_L, a) = [xa]_L$$

zur Erinnerung:  $[x]_L = \{ y \in \Sigma^* : x \sim_L y \}$

# Beispiel: Minimalautomat für $0^*1^*$

2132

Sei  $L = \{0^k1^n : k, n \geq 0\}$ .

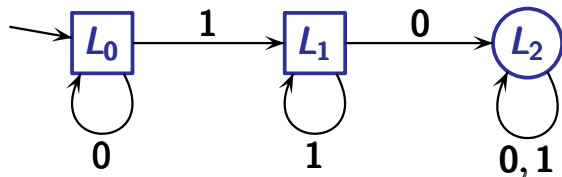
Zur Erinnerung:  $\{0, 1\}^*/L = \{L_0, L_1, L_2\}$ , wobei

$$L_0 \hat{=} 0^*$$

$$L_1 \hat{=} 0^*1^+$$

$$L_2 \hat{=} 0^*1^+0(0+1)^*$$

Minimalautomat  $\mathcal{M}_L$



Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  eine Sprache mit endlichem Nerode-Index.

Korrektheit des Minimalautomaten:  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_L) = L$

Zeige hierzu, dass für alle  $x \in \Sigma^*$  gilt:

$$(1) \quad [x]_L \in F \iff x \in L$$

$$(2) \quad \delta([ \varepsilon ]_L, x) = [x]_L$$

erweiterte  
Übergangs-  
funktion

für alle  $q \in Q$ ,  $x \in \Sigma^*$ ,  $a \in \Sigma$ :

$$\delta(q, \varepsilon) = q$$

$$\delta(q, xa) = \delta(\delta(q, x), a) = \delta(\delta(q, a), x)$$

Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  eine reguläre Sprache.

Ist  $\mathcal{M}$  ein DFA mit totaler Übergangsfunktion und  $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = L$ , so ist:

$$|\mathcal{M}| \geq |\mathcal{M}_L|$$

Anzahl an  
Zuständen  
in  $\mathcal{M}$

Nerode-Index von  $L$ :  
Anzahl an Nerode-  
Äquivalenzklassen

für DFA mit partieller Übergangsfunktion:

$$|\mathcal{M}| \geq |\mathcal{M}_L| - 1$$

Sei  $L$  eine reguläre Sprache. Dann gilt:

$$(1) \quad \mathcal{L}(\mathcal{M}_L) = L$$

(2) Jeder Zustand  $[x]_L$  in  $\mathcal{M}_L$  ist vom Anfangszustand  $[\varepsilon]_L$  erreichbar.

$$(3) \quad \sim_{\mathcal{M}_L} = \sim_L$$

DFA-Äquivalenz:

$$x \sim_{\mathcal{M}_L} y \quad \text{gdw} \quad \delta([\varepsilon]_L, x) = \delta([\varepsilon]_L, y)$$

Nerode-Äquivalenz:

$$x \sim_L y \quad \text{gdw} \quad \text{für alle } z \in \Sigma^*: xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$$

Sei  $L$  eine reguläre Sprache. Dann ist  $\mathcal{M}_L$  der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte DFA  $\mathcal{M}$  mit totaler Übergangsfunktion, so dass gilt:

- (1)  $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = L$
- (2) Jeder Zustand in  $\mathcal{M}$  ist vom Anfangszustand erreichbar.
- (3)  $\sim_{\mathcal{M}} = \sim_L$

- $\mathcal{M} = \mathcal{M}_L$  erfüllt Eigenschaften (1), (2) und (3)
- Jeder DFA  $\mathcal{M}$ , der (1), (2) und (3) erfüllt, ist zu  $\mathcal{M}_L$  isomorph, d.h.,  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{M}_L$  stimmen bis auf die Namen der Zustände überein.