

$G = (V, \Sigma, \mathcal{P}, S)$ CNF-Grammatik, $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^+$

für $1 \leq j \leq n+1-i$: berechne die Variablenmengen

$$V[i, j] = \{ A \in V : A \Rightarrow^* \underbrace{a_i a_{i+1} \dots a_{i+j-1}} \}$$

Teilwort von w
der Länge j

und prüfe, ob $S \in V[1, n]$

für $j = 1$: $V[i, 1] = \{ A \in V : A \rightarrow a_i \}$

für $j \geq 2$: $V[i, j] = \{ A \in V : \text{es gibt Regel } A \rightarrow BC$
und ein $\ell \in \{1, \dots, j-1\}$ mit
 $B \in V[i, \ell]$ und $C \in V[i+\ell, j-\ell] \}$

```

FOR  $i = 1, \dots, n$  DO
     $V[i, 1] := \{ A \in V : A \rightarrow a_i \}$ 
OD
FOR  $j = 2, \dots, n$  DO
    FOR  $i = 1, \dots, n+1-j$  DO
         $V[i, j] := \bigcup_{1 \leq \ell \leq j-1} \{ A \in V : \text{es gibt } A \rightarrow BC \text{ mit} \\ B \in V[i, \ell], C \in V[i+\ell, j-\ell] \}$ 
    OD
OD
IF  $S \in V[1, n]$  THEN return "ja"
ELSE return "nein"
FI

```

CNF-Grammatik G :

$S \rightarrow AC \mid AB$

$C \rightarrow SB$

$A \rightarrow a$

$B \rightarrow b$

Wort: $w = aabb$

4	{S}			
3	∅	{C}		
2	∅	{S}	∅	
1	{A}	{A}	{B}	{B}
	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>

Komplexität des CYK-Algorithmus

384

```
FOR  $i = 1, \dots, n$  DO  
   $V[i, 1] := \{ A \in V : A \rightarrow a_i \}$   
OD
```

```
FOR  $j = 2, \dots, n$  DO  
  FOR  $i = 1, \dots, n+1-j$  DO
```

```
     $V[i, j] := \bigcup_{1 \leq \ell \leq j-1} \{ A \in V : \text{es gibt } A \rightarrow BC \text{ mit}$   
     $B \in V[i, \ell], C \in V[i+\ell, j-\ell] \}$ 
```

```
  OD  
OD  
IF  $S \in V[1, n]$  THEN ...  
  ELSE ...  
FI
```

Laufzeit:

$$\mathcal{O}(n^3)$$

Platzbedarf:

$$\mathcal{O}(n^2)$$

Platzbedarf wird
dominiert durch die
Mengen $V[i, j]$

gegeben: kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, \mathcal{P}, S)$
gefragt: gilt $\mathcal{L}(G) = \emptyset$?

lösbar in Zeit $\mathcal{O}(|G|)$, z.B. mit dem Leerheitstest
“prüfe, ob das Startsymbol nutzlos ist”

wende den **Markierungsalgorithmus** zur Bestimmung
aller **nicht-nutzlosen Variablen** an

IF S ist nicht markiert ist

THEN gib “ja” aus $\leftarrow \mathcal{L}(G)$ ist leer

ELSE gib “nein” aus $\leftarrow \mathcal{L}(G)$ ist nicht leer

FI

Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann gibt es eine ganze Zahl $n \geq 1$, so dass sich jedes Wort $z \in L$ der Länge $|z| \geq n$ wie folgt zerlegen lässt:

$$z = uvwxy$$

so dass

- (1) $uv^kwx^ky \in L$ für alle $k \in \mathbb{N}$
- (2) $|vx| \geq 1$, d.h., $v \neq \varepsilon$ oder $x \neq \varepsilon$
- (3) $|vwx| \leq n$

Beweis: setzt eine **CNF**-Grammatik für L bzw. $L \setminus \{\varepsilon\}$ voraus

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CNF-Grammatik mit

$$N = |V| \quad \leftarrow \text{Anzahl an Variablen}$$

Konstante aus dem Pumping Lemma: $n \stackrel{\text{def}}{=} 2^N$

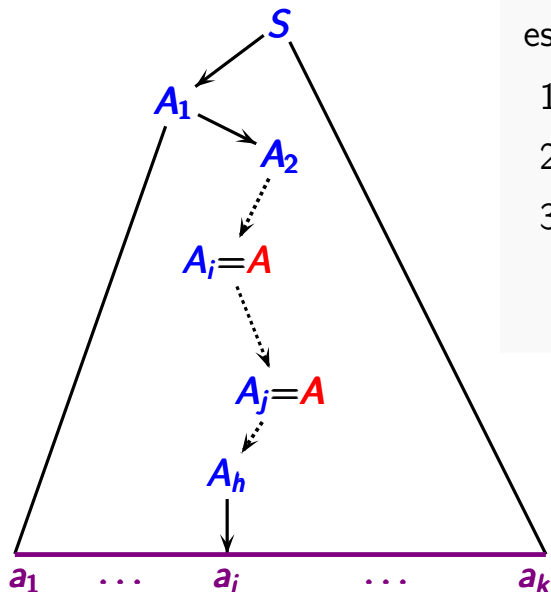
Sei $z \in \mathcal{L}(G)$ ein ableitbares Wort der Länge $|z| \geq n$.

Sei T ein Ableitungsbaum für z in G . Dann gilt:

1. T ist ein Binärbaum mit $|z|$ Blättern.
2. Höhe von T ist $h+1$, wobei $h \geq \log |z| \geq N$

Sei $A_0 A_1 A_2 \dots A_h a$ ein längster Pfad in T , d.h.,

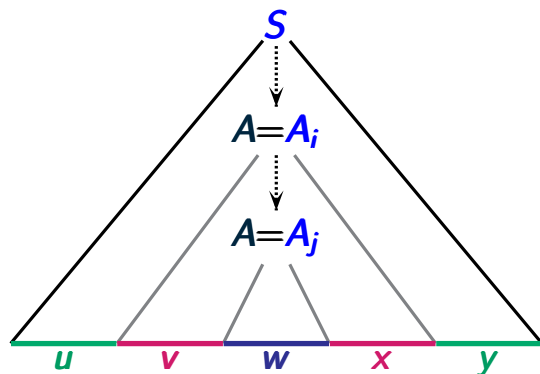
- $A_0 = S$, A_1, A_2, \dots, A_h sind Variablen
- $a \in \Sigma$ ist ein Zeichen von z



es gibt Variable A mit

1. $A_i = A = A_j$
2. $0 \leq i < j \leq h$
3. A_{i+1}, \dots, A_h
paarweise
verschieden

$$z = a_1 \dots a_j \dots a_k$$



$$\begin{aligned}
 S &\Longrightarrow^* uAy \\
 A &\Longrightarrow^* vAx \\
 A &\Longrightarrow^* w
 \end{aligned}$$

$$z = uvwxy$$

zeige: die drei geforderten Eigenschaften sind erfüllt:

- (1) $uv^kwx^ky \in \mathcal{L}(G)$ für alle $k \in \mathbb{N}$
- (2) $v \neq \varepsilon$ oder $x \neq \varepsilon$
- (3) $|vwx| \leq n = 2^N$

$$L = \{ a^i b^j c^i : i \in \mathbb{N} \} \text{ ist nicht kontextfrei.}$$

Beweis mit Hilfe des Pumping Lemmas (PL).

Angenommen L ist kontextfrei. Sei n die Konstante aus dem PL und

$$a^n b^n c^n = uvwxy$$

eine Zerlegung von $z = a^n b^n c^n \in L$ wie im PL.

Wegen $|vwx| \leq n$ ist vwx entweder Teilwort von $a^n b^n$ oder von $b^n c^n$, etwa $vwx = a^l b^k$. Wegen $|vx| \geq 1$ gilt

$$uv^2wx^2y \notin L$$

Widerspruch zur
Pump-Eigenschaft (1)