3.5.2 Nichtdeterministische Kellerautomaten

Ein Kellerautomat besteht aus einer endlichen Kontrolle, einem Eingabeband, auf das nur lesende Zugriffe (von links nach rechts) zulässig sind sowie einem Keller. Siehe Abbildung 27 auf Seite 94. Der Keller ist unbeschränkt und kann beliebig viele Zeichen eines festen Kelleralphabets speichern. Die endliche Kontrolle besteht aus (Kontroll-)Zuständen eines endlichen Zustandsraums. Ähnlich wie in ε-NFA kann in jedem Schritt entweder ein Eingabezeichen gelesen werden oder ein spontaner ε-Übergang stattfinden. Im Gegensatz zu endlichen Automaten hängt die Übergangsfuktion nicht nur vom aktuellen Zustand und Zeichen unter dem Lesekopf ab, sondern auch von dem obersten Kellersymbol. Verbunden mit jedem Übergang ist eine Pop-Operation (Entfernen des obersten Kellersymbols) sowie eine (eventuell leere) Folge von Push-Operationen.

Definition 3.17 (Nichtdeterministischer Kellerautomat (NKA)). Ein NKA ist ein Tupel $\mathcal{K} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$ bestehend aus

- einer endlichen Menge Q von Zuständen,
- einem Eingabealphabet Σ,
- einem Kelleralphabet Γ,
- einem Anfangszustand $q_0 \in Q$,
- einem Kellerstartsymbol #,
- einer Menge $F \subseteq Q$ von Endzuständen,
- einer totalen Übergangsfunktion $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$, so dass die Mengen $\delta(q, a, A)$ und $\delta(q, \varepsilon, A)$ endlich sind für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$ und $A \in \Gamma$.

Wie zuvor verwenden wir Kleinbuchstanben $a, b, c, \ldots$ am Anfang des Alphabets für Symbole aus Σ. Grossbuchstaben $A, B, C, \ldots$ dienen als Bezeichner für Kellersymbole, d.h., Elemente aus dem Kelleralphabet Γ. Ausnahmen sind Beispiele für NKA, in denen manche Kellersymbole direkten Bezug zu den Zeichen in Σ haben, für die wir dann dasselbe Symbol verwenden. ■

Die intuitive Arbeitsweise eines Kellerautomaten ist wie folgt. Initial steht das Eingabewort auf dem Eingabeband; der Keller enthält nur das Symbol #. Der Automat startet die Berechnung in dem Anfangszustand q_0. Das weitere Verhalten ist durch die Übergangsfunktion bestimmt. Ist q der aktuelle Zustand, a das Eingabezeichen unter dem Lesekopf und A das oberste Kellersymbol, dann wählt der Automat nichtdeterministisch ein Paar

$$(p, z) \in \delta(q, a, A) \cup \delta(q, \varepsilon, A).$$

Die Paare $(p, z) \in \delta(q, a, A)$ stehen für die Bearbeitung des nächsten Eingabezeichens; in diesem Fall wird der Lesekopf um eine Position nach rechts verschoben. Die Paare $(p, z) \in \delta(q, \varepsilon, A)$ repräsentieren ε-Transitionen, in denen kein Eingabezeichen gelesen wird; in diesem Fall bleibt die Position des Lesekopfs unverändert. Ist $(p, z) \in \delta(q, a, A) \cup \delta(q, \varepsilon, A)$ die gewählte Alternative, dann wechselt der Kellerautomat in Zustand p und ersetzt das oberste Kellersymbol A durch das Wort z. Ist $z = \varepsilon$, dann wird das oberste Kellersymbol lediglich entfernt; es wird jedoch nichts auf den Keller gelegt. In jedem Schritt werden also genau eine Pop-Operation und 0 oder mehrere Push-Operationen ausgeführt.

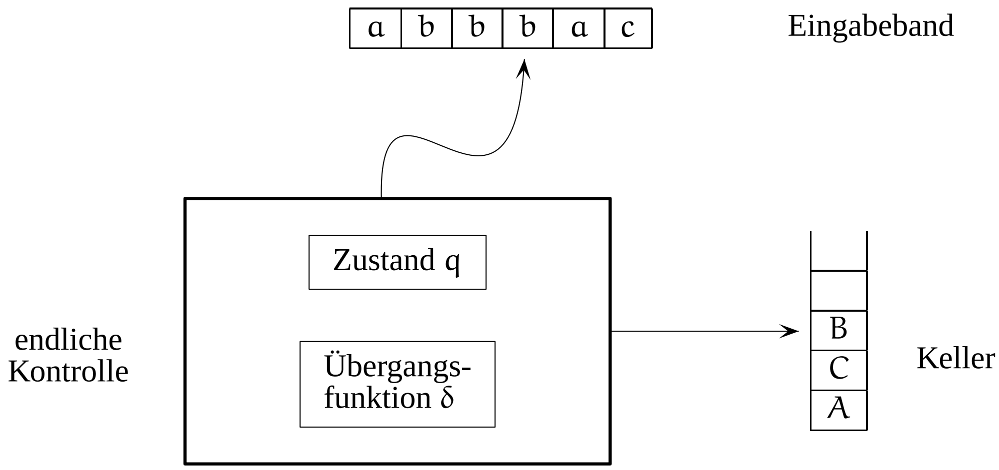

Abbildung 27: Schema eines NKA

Konfigurationen und Konfigurationswechsel. Für eine Formalisierung des schrittweisen Verhaltens benötigen wir den Begriff einer Konfiguration. Diese setzt sich aus dem aktuellen (Kontroll-)Zustand, dem aktuellen Kellerinhalt und der Information über die Position des Lesekopfs zusammen. Letzteres wird durch das noch zu lesende Suffix der Eingabe dargestellt. Sei $\mathcal{K}$ wie oben. Eine *Konfiguration* für $\mathcal{K}$ ist ein Tripel (q, u, y) bestehend aus einem Zustand $q \in Q$, einem Wort $u \in \Sigma^*$ über dem Eingabealphabet und einem Wort $y \in \Gamma^*$ über dem Kelleralphabet. Intuitiv steht q für den aktuellen Zustand, x für den noch nicht gelesenen Teil der Eingabe und y für den Kellerinhalt. Das erste Zeichen von y ist das oberste Kellersymbol. Die *Anfangskonfiguration* für das Eingabewort $w \in \Sigma^*$ ist das Tripel $(q_0, w, \#)$. Der NKA aus Abbildung 27 auf Seite 94 befindet sich in der Konfiguration (q, bac, BCA).

Sei $\mathcal{K}$ ein NKA, wie zuvor. $\mathit{Konf}(\mathcal{K}) = Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ bezeichnet die Menge aller Konfigurationen. Die Konfigurationsrelation $\vdash_{\mathcal{K}}$ (oder kurz $\vdash$) formalisiert den Übergang von einer zur nächsten Konfiguration. Sie ist also eine binäre Relation auf $\mathit{Konf}(\mathcal{K})$ und wird als die kleinste Relation definiert, so dass folgende Eigenschaften (1) und (2) für alle Zustände q, $p \in Q$, Kellersymbole $A \in \Gamma$, und Wörter $u \in \Sigma^*$, y, $z \in \Gamma^*$ gelten:

(1) Aus $(p, z) \in \delta(q, a, A)$ und $a \in \Sigma$ folgt $(q, au, Ay) \vdash (p, u, zy)$.

(2) Aus $(p, z) \in \delta(q, \varepsilon, A)$ folgt $(q, u, Ay) \vdash (p, u, zy)$.

Bedingung (1) steht für das Lesen eines Eingabezeichens und Bedingung (2) für eine ε-Transition, die – wie in ε-NFA – unabhängig vom Zeichen unter dem Lesekopf stattfinden kann. In beiden Fällen wird vorausgesetzt, dass A das oberste Kellersymbol der aktuellen Konfiguration ist. Ist der Keller leer, d.h., ist die aktuelle Konfiguration von der Form (q, u, ε), so ist weder (1) noch (2) anwendbar. Daher gilt

$$(q, u, \varepsilon) \not\vdash \text{ für alle } q \in Q \text{ und } u \in \Sigma^*.$$

Kellerautomaten halten also stets an, wenn der Keller leer ist. Weiter hält ein Kellerautomat stets dann an, wenn $\delta(q, a, A) = \delta(q, \varepsilon, A) = \varnothing$ für den aktuellen Zustand q, das Zeichen a unter dem Lesekopf und das Topelement A des Kellers.

Das Symbol $\vdash^*_{\mathcal{K}}$ (oder kurz $\vdash^*$) bezeichnet die transitive, reflexive Hülle von $\vdash$. Es gilt also $(q,u,y) \vdash^* (q',u',y')$ gilt genau dann, wenn die Konfiguration (q,u,y) durch 0 oder mehrere Schritte in (q',u',y') überführt werden kann, wobei jeder Konfigurationswechsel gemäß $\vdash$ als "Schritt" zählt. Jede Konfigurationsfolge

$$(q_0,w,\#) \ \vdash \ (q_1,u_1,y_1) \ \vdash \ (q_2,u_2,y_2) \ \vdash \ldots$$

wird ein *Lauf* von $\mathcal{K}$ für w genannt, sofern die Folge entweder maximal ist (also unendlich ist oder in einer Konfiguration endet, die keine Folgekonfiguration hat) oder in einer Konfiguration (q_m,u_m,y_m) endet, für die $u_m = \varepsilon$ gilt (d.h., das Eingabewort wurde komplett gelesen). Manchmal sprechen wir auch von einer *Berechnung* von $\mathcal{K}$ für w.

Bemerkung 3.18 (Läufe in NFA vs. Läufe in NKA.). Für NFA konnten wir auf das Konzept von Konfigurationen verzichten und Läufe für ein Eingabewort $a_1\,a_2\ldots a_n$ als Zustandsfolgen $q_0\,q_1\ldots$ bestehend aus höchstens $n{+}1$ Zuständen definieren. Wenn keine ε-Transitionen vorhanden sind, dann ist klar, dass im $(i{+}1)$-ten Zustand q_i die ersten i Zeichen $a_1,\ldots,a_i$ bereits gelesen wurden und $a_{i+1}\,a_{i+2}\ldots a_n$ das noch zu lesende Suffix der Eingabe ist. Dies gilt zwar auch für NKA ohne ε-Transitionen, also NKA mit $\delta(q,\varepsilon,A) = \varnothing$ für alle Zustände $q \in Q$ und Kellersymbole $A \in \Gamma$, jedoch hängt das Verhalten des NKA ab Zustand $q = q_i$ nicht nur von den restlichen Eingabezeichen $a_{i+1}\,a_{i+2}\ldots a_n$ ab, sondern auch von dem Kellerinhalt.

Die in Definition 2.21 auf Seite 39 angegebene Definition eines Laufs für $w = a_1 a_2 \ldots a_n \in \Sigma^*$ in einem ε-NFA $\mathcal{M}$ kann in Analogie zu der oben angegebenen Definition eines Laufs in einem NKA umformuliert werden. Die Konfigurationen eines ε-NFA $\mathcal{M} = (Q,\Sigma,\delta,Q_0,F)$ sind nun Paare $(q,u) \in Q \times \Sigma^*$. Die Konfigurationsrelation $\vdash_{\mathcal{M}}$ ist die kleinste binäre Relation auf $Q \times \Sigma^*$, so dass (1) $(q,au) \vdash (p,u)$, falls $p \in \delta(q,a)$ und (2) $(q,u) \vdash (p,u)$, falls $p \in \delta(q,\varepsilon)$. Als Lauf für $w = a_1a_2\ldots a_n \in \Sigma^*$ in $\mathcal{M}$ kann nun jede Folge

$$(q_0,u_0) \vdash (q_1,u_1) \vdash (q_2,u_2) \vdash \ldots$$

von Konfigurationen, die in einer Konfiguration (q_0,u_0) mit $q_0 \in Q_0$ und $u_0 = w$ beginnt, bezeichnet werden, sofern die betreffende Folge entweder unendlich ist oder in einer Konfiguration (q_m,u_m) endet, die entweder keine Folgekonfiguration besitzt oder für die $u_m = \varepsilon$ gilt. Die in Definition 2.21 angegebene Definition eines Laufs ergibt sich dann durch die Projektionen auf die Zustände in allen solchen endlichen Konfigurationsfolgen. Die von $\mathcal{M}$ akzeptierte Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ besteht aus genau solchen Wörtern $w \in \Sigma^*$, für die es einen Anfangszustand $q_0 \in Q_0$ und einen Zustand $p \in F$ gibt, so dass $(q_0,w) \vdash^* (p,\varepsilon)$. Wie für NKA bezeichnet $\vdash^*$ die reflexive, transitive Hülle von $\vdash$. ■

Akzeptanzverhalten. Für Kellerautomaten unterscheidet man zwei Varianten der akzeptierten Sprache. Diese basieren entweder auf der Akzeptanz *über Endzustände* oder *bei leerem Keller*. Für die Akzeptanz über Endzustände fordert man, dass nach dem Lesen der kompletten Eingabe (und nach eventuellen ε-Transitionenn) ein Endzustand erreicht ist; unabhängig vom Kellerinhalt. In diesem Fall sind genau die Konfigurationen der Form (q,ε,y) mit $q \in F$ akzeptierend. Dagegen stellt die Akzeptanz bei leerem Keller die Forderung, dass der Keller leer und die Eingabe zu Ende gelesen ist. In diesem Fall sind genau die Konfigurationen $(q,\varepsilon,\varepsilon)$ akzeptierend, wobei q ein beliebiger Zustand ist. In beiden Akzeptanzvarianten sind sämtliche Berechnungen, welche enden bevor die Eingabe zu Ende gelesen ist, verwerfend.

Definition 3.19 (Die akzeptierten Sprachen eines NKA). Sei $\mathcal{K} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$ ein NKA. Die *bei leerem Keller akzeptierte* Sprache ist

$$\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}) \;=\; \big\{w \in \Sigma^* : (q_0, w, \#) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \text{ für ein } q \in Q\big\}.$$

Die *über Endzustände akzeptierte Sprache* ist

$$\mathcal{L}(\mathcal{K}) \;=\; \big\{w \in \Sigma^* : (q_0, w, \#) \;\vdash^*\; (q, \varepsilon, y) \text{ für ein } y \in \Gamma^*, q \in F\big\}.$$

■

Für die Akzeptanz bei leerem Keller ist die Endzustandsmenge völlig unerheblich. Für NKA mit Akzeptanz bei leerem Keller kann man daher auf die Komponente F völlig verzichten. Wir schreiben sie als Tupel $\mathcal{K} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$.

Eine Charakterisierung der akzeptierten Sprache eines Kellerautomaten durch *akzeptierender Läufe* ist wie für NFA möglich. Unter dem Akzeptanzkriterium "über Endzustände" wird ein Lauf für das Eingabewort w

$$(q_0, w, \#) \;\vdash\; (q_1, u_1, y_1) \;\vdash\; (q_2, u_2, y_2) \;\vdash\; \ldots \;\vdash (q_m, u_m, y_m)$$

akzeptierend genannt, falls $q_m \in F$ (ein Endzustand wurde erreicht) und $u_m = \varepsilon$ (die Eingabe wurde komplett gelesen). Für NKA mit Akzeptanz bei leerem Keller sind genau solche Läufe für w

$$(q_0, w, \#) \;\vdash\; (q_1, u_1, y_1) \;\vdash\; (q_2, u_2, y_2) \;\vdash\; \ldots \;\vdash (q_m, u_m, y_m)$$

akzeptierend, für die gilt: $u_m = \varepsilon$ (die Eingabe wurde komplett gelesen) und $y_m = \varepsilon$ (der Keller ist leer).

Beispiel 3.20 (NKA). Die Sprache $L = \{a^n b^n : n \geqslant 1\}$ wird durch einen Kellerautomaten $\mathcal{K}$ mit zwei Zuständen q_a und q_b akzeptiert, dessen Arbeitsweise für das Eingabewort $w \in \{a, b\}^*$ informell wie folgt beschrieben werden kann. $\mathcal{K}$ startet in Zustand q_a. Ist die Eingabe leer oder das erste Eingabezeichen ein b, dann verwirft $\mathcal{K}$ sofort. Andernfalls liest $\mathcal{K}$ die führenden a's von w und legt diese im Keller ab. Mit Lesen des ersten a's wird das Anfangskellersymbol # überschrieben. Sobald das erste b gelesen wird, wechselt $\mathcal{K}$ in den Zustand q_b. In Zustand q_b wird für jedes gelesene b ein a aus dem Keller entfernt. Befindet sich $\mathcal{K}$ in Zustand q_b, so verwirft $\mathcal{K}$ das Eingabewort genau in folgenden Fällen:

- In Zustand q_b wird ein a gelesen. Dann ist w von der Gestalt $a^n b^m a x$, wobei $1 \leqslant m < n$ und $x \in \{a, b\}^*$, und somit $w \notin L$.
- Der Keller ist leer und die Eingabe ist noch nicht zu Ende gelesen. Dann ist w von der Form $a^n b^n u$, wobei $u \in \{a, b\}^+$, und somit $w \notin L$.

Die präzise Darstellung von $\mathcal{K}$ ist wie folgt:

$$\mathcal{K} \;=\; (\{q_a, q_b\}, \{a, b\}, \{a, b, \#\}, \delta, q_a, \#, \{q_b\}),$$

wobei

$$\begin{array}{rclcrcl} \delta(q_a, a, \#) & = & \{(q_a, a)\} & \qquad & \delta(q_a, a, a) & = & \{(q_a, aa)\} \\ \delta(q_a, b, a) & = & \{(q_b, \varepsilon)\} & & \delta(q_b, b, a) & = & \{(q_b, \varepsilon)\} \end{array}$$

und $\delta(\cdot) = \varnothing$ in allen verbleibenden Fällen. Beispielsweise gilt

$$
\begin{array}{lllllllll}
(q_a, aabb, \#) & \vdash & (q_a, abb, a) & \vdash & (q_a, bb, aa) & \vdash & (q_b, b, a) & \vdash & (q_b, \varepsilon, \varepsilon) \\
(q_a, aaba, \#) & \vdash & (q_a, aba, a) & \vdash & (q_a, ba, aa) & \vdash & (q_b, a, a) & & \\
(q_a, aabbb, \#) & \vdash & (q_a, abbb, a) & \vdash & (q_a, bbb, aa) & \vdash & (q_b, bb, a) & \vdash & (q_b, b, \varepsilon)
\end{array}
$$

und $(q_a, bbaa, \#) \not\vdash$ bzw. $(q_a, \varepsilon, \#) \not\vdash$. Für den formalen Nachweis, dass $L = \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$ ist einerseits zu zeigen, dass alle nicht-leeren Wörter der Form $a^n b^n$ von $\mathcal{K}$ akzeptiert werden. Dies erfolgt durch Angabe akzpetierender Läufe:

$$(q_a, a^n b^n, \#) \vdash^* (q_a, b^n, a^n) \vdash (q_b, b^{n-1}, a^{n-1}) \vdash^* (q_b, \varepsilon, \varepsilon)$$

Umgekehrt ist zu zeigen, dass keine anderen Wörter von $\mathcal{K}$ akzeptiert haben. Zunächst betrachten wir das leere Wort. NKA $\mathcal{K}$ verwirft das Eingabewort ε, da es in Zustand q_a keine ε-Transitionen gibt und daher $(q_a, \varepsilon, \#) \not\vdash$ gilt. Alle Wörter, die mit b beginnen, werden ebenfalls von $\mathcal{K}$ sofort verworfen, da es für Zustand q_a weder eine ε-Transitionen noch eine b-Transition gibt, sofern # das obserste Kellersymbol ist. D.h., es gilt $(q_a, bx, \#) \not\vdash$ für alle $x \in \{a,b\}^*$. Letztendlich müssen noch Wörter der Form $a^n b^m a x$ mit $1 \leqslant m < n$ und $x \in \{a,b\}^*$ sowie Wörter der Form $a^n b^n u$ mit $n \geqslant 1$ und $u \in \{a,b\}^+$. Für Wörter des ersten Typs verwirft $\mathcal{K}$, da das Verhalten von $\mathcal{K}$ durch Läufe der Form

$$(q_a, a^n b^m a x, \#) \vdash^* (q_a, b^m a x, a^n) \vdash (q_b, b^{m-1} a x, a^{n-1}) \vdash^* (q_b, a x, a^{n-m}) \not\vdash$$

bestimmt ist. Im zweiten Fall sind die Läufe ebenfalls verwerfend:

$$(q_a, a^n b^n u, \#) \vdash^* (q_a, b^n u, a^n) \vdash (q_b, b^{n-1} u, a^{n-1}) \vdash^* (q_b, u, \varepsilon) \not\vdash,$$

da der Keller in der letzten Konfiguration leer ist, aber die Eingabe noch nicht komplett gelesen ist. Die von $\mathcal{K}$ mit dem Endzustand q_b akzeptierte Sprache stimmt jedoch nicht mit L überein. Beispielsweise ist dann

$$(q_a, aab, \#) \vdash (q_a, ab, a) \vdash (q_a, b, aa) \vdash (q_b, \varepsilon, a)$$

ein akzeptierender Lauf für aab in $\mathcal{K}$, da dieser in einer Konfiguration endet, in welcher der aktuelle Zustand (nämlich q_b) ein Endzustand ist und die Eingabe komplett gelesen wurde. Daher gilt

$$aab \in \mathcal{L}(\mathcal{K}) \setminus \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}).$$

Man kann zeigen, dass $\mathcal{L}(\mathcal{K}) = \{a^n b^m : n \geqslant m \geqslant 1\}$. ■

Beispiel 3.21 (NKA). Der NKA in dem vorangegangenen Beispiel ist deterministisch, da er keine ε-Transitionen hat und die Übergangsfunktion für jedes Tripel $(q, a, A) \in Q \times \Sigma \times \Gamma$ als höchstens einelementige Menge definiert ist. Insbesondere ist in jeder Konfiguration höchstens ein Übergang möglich. Wir geben nun ein Beispiel für einen NKA mit "echtem Nichtdeterminismus" für die Sprache

$$L = \{ww^R : w \in \{0,1\}^*\}.$$

Dabei steht w^R für das inverse (gespiegelte) Wort von w. Ist also $w = a_1 a_2 \ldots a_n$, so ist $w^R = a_n \ldots a_2 a_1$. (Der Buchstabe "R" steht für "reverse".)

Die Arbeitsweise des NKA für gegebenes Eingabewort $x \in \{0,1\}^*$, für welches zu prüfen ist, ob x die Form ww^R für ein $w \in \{0,1\}^*$ hat, basiert auf folgenden Ideen. Wir verwenden zwei Zustände q^+ und q^-. In Zustand q^+ lesen wir ein Präfix des Eingabeworts x und legen die gelesenen Symbole zeichenweise im Keller ab. Zu jedem Zeitpunkt steht also das Wort v^R im Keller, wenn v das bereits gelesene Präfix der Eingabe x ist. Zustand q^- dient dazu, zu prüfen, ob der Rest der Eingabe mit dem im Keller abgelegten Wort v^R übereinstimmt. Stimmt das gelesene Eingabezeichen mit dem obersten Kellerzeichen überein, dann wird die Entscheidung, ob von Zustand q^+ in den Zustand q^- zu wechseln ist, *nichtdeterministisch* gefällt. Wir definieren den NKA mit Akzeptanz bei leerem Keller wie folgt:

$$\mathcal{K} = (\{q^+, q^-\}, \{0,1\}, \{0,1,\#\}, \delta, q^+).$$

Die Übergangsfunktion δ ist wie folgt definiert. Seien $a, b \in \{0,1\}$, $a \neq b$.

$$\begin{array}{lcllcl}
\delta(q^+, a, a) & = & \{(q^+, aa), (q^-, \varepsilon)\} & & & \\
\delta(q^+, a, b) & = & \{(q^+, ab)\} & \delta(q^-, a, a) & = & \{(q^-, \varepsilon)\} \\
\delta(q^+, a, \#) & = & \{(q^+, a\#)\} & \delta(q^-, \varepsilon, \#) & = & \{(q^-, \varepsilon)\} \\
\delta(q^+, \varepsilon, \#) & = & \{(q^-, \varepsilon)\} & & &
\end{array}$$

und $\delta(\cdot) = \varnothing$ in allen anderen Fällen. Mögliche Berechnungen für das Wort $w = 0110$ sind:

$$\begin{array}{lclclcl}
(q^+, 0110, \#) & \vdash & (q^+, 110, 0\#) & \vdash & (q^+, 10, 10\#) & \vdash & (q^-, 0, 0\#) \\
 & & & \vdash & (q^-, \varepsilon, \#) & \vdash & (q^-, \varepsilon, \varepsilon)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lclclcl}
(q^+, 0110, \#) & \vdash & (q^+, 110, 0\#) & \vdash & (q^+, 10, 10\#) & \vdash & (q^+, 0, 110\#) \\
 & & & & & \vdash & (q^+, \varepsilon, 0110\#)
\end{array}$$

$$(q^+, 0110, \#) \vdash (q^+, 0110, \varepsilon)$$

Die erste Berechnung ist akzeptierend; die zweite und dritte nicht.