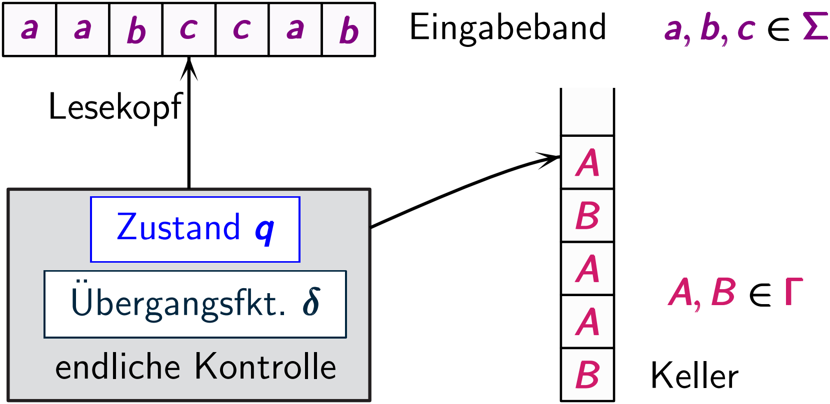
Nichtdeterministischer Kellerautomat (NKA)



Übergangsfkt. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$

Nichtdeterministischer Kellerautomat (NKA)

NKA: 7-Tupel $\mathcal{K} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$, wobei

- Q endliche Menge von Zuständen
- Σ Eingabealphabet
- Γ Kelleralphabet
- Übergangsfunktion: totale Funktion

  $$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*},$$

  so dass $\delta(q, a, A)$ und $\delta(q, \varepsilon, A)$ endlich
- $q_0 \in Q$ Anfangszustand
- $\# \in \Gamma$ Kellerstartsymbol
- $F \subseteq Q$ Menge von Endzuständen

Konfigurationen eines NKA

Sei $\mathcal{K} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$ ein NKA.

Eine Konfiguration von $\mathcal{K}$ ist Tripel

$$\langle q, w, x \rangle \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$$

wobei

- q aktueller Zustand
- w das Suffix des Eingabeworts, das noch nicht gelesen wurde
- x Inhalt des Kellers

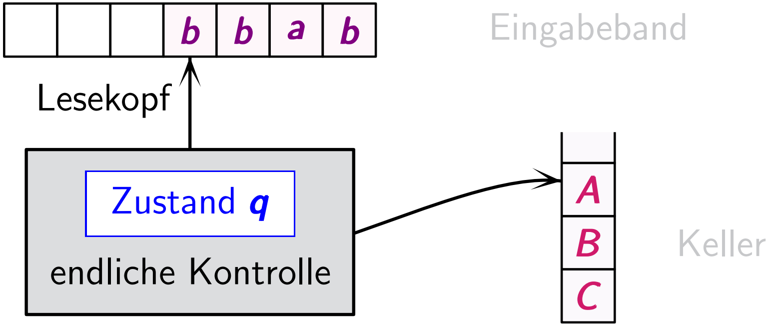
Top-Element des Kellers ist das erste Zeichen von x

Konfigurationen eines NKA

Tripel $\langle q, w, x\rangle \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$

- q aktueller Zustand
- w nocht nicht gelesenes Suffix der Eingabe
- x Inhalt des Kellers

Beispiel: Konfiguration $\langle q, bbab, ABC\rangle$



Konfigurationsrelation $\vdash$ eines NKA

gegeben: NKA $\mathcal{K} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$

Konfigurationsrelation $\vdash \subseteq \mathit{Konf}(\mathcal{K}) \times \mathit{Konf}(\mathcal{K})$

ist die kleinste Relation, so dass für alle q, $p \in Q$ und $a \in \Sigma$, $u \in \Sigma^*$, $A \in \Gamma$, z, $y \in \Gamma^*$ gilt:

1. falls $(p, z) \in \delta(q, a, A)$: $\langle q, au, Ay \rangle \vdash \langle p, u, zy \rangle$
2. falls $(p, z) \in \delta(q, \varepsilon, A)$: $\langle q, u, Ay \rangle \vdash \langle p, u, zy \rangle$

$\mathit{Konf}(\mathcal{K})$ = Menge aller Konfigurationen von $\mathcal{K}$

Konfigurationsrelation $\vdash$ "1 Schritt des NKA"

1. falls $(p, z) \in \delta(q, a, A)$: $\langle q, au, Ay \rangle \vdash \langle p, u, zy \rangle$
2. falls $(p, z) \in \delta(q, \varepsilon, A)$: $\langle q, u, Ay \rangle \vdash \langle p, u, zy \rangle$

Konfigurationsrelation $\vdash^*$ "beliebig viele Schritte"

reflexive, transitive Hülle von $\vdash$, d.h., sind γ, γ' Konfigurationen von $\mathcal{K}$, so gilt:

$\gamma \vdash^* \gamma'$ gdw es gibt Konfigurationen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, wobei $n \geqslant 0$, so dass

$$\gamma = \gamma_0 \vdash \gamma_1 \vdash \ldots \vdash \gamma_n = \gamma'$$

Akzeptierte Sprache eines NKA

Sei $\mathcal{K} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$ ein NKA.

Akzeptanz über Endzustände:

$$\mathcal{L}(\mathcal{K}) = \left\{ w \in \Sigma^* : \text{es gibt } q \in F \text{ und } x \in \Gamma^* \text{ mit } \langle q_0, w, \# \rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, x \rangle \right\}$$

Akzeptanz bei leerem Keller:

$$\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}) = \left\{ w \in \Sigma^* : \text{es gibt } q \in Q \text{ mit } \langle q_0, w, \# \rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \varepsilon \rangle \right\}$$

Keller ist leer

Akzeptierende Läufe in NKA

Sei $\mathcal{K} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$ ein NKA mit Akzeptanz über Endzustände

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathcal{K}) &= \big\{ w \in \Sigma^* : \text{es gibt } q \in F \text{ und } x \in \Gamma^* \text{ mit } \langle q_0, w, \# \rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, x \rangle \big\} \\ &= \big\{ w \in \Sigma^* : \text{es gibt einen akzeptierenden Lauf für } w \text{ in } \mathcal{K} \big\}\end{aligned}$$

akzeptierender Lauf für w in $\mathcal{K}$:

$$\underbrace{\langle p_0, w_0, y_0 \rangle}_{\langle q_0, w, \# \rangle} \vdash \langle p_1, w_1, y_1 \rangle \vdash \ldots \vdash \underbrace{\langle p_m, w_m, y_m \rangle}_{\langle q, \varepsilon, x \rangle}$$

initiale Konfiguration

wobei $p_m = q \in F$

Sei $\mathcal{K} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ ein NKA mit Akzeptanz bei leerem Keller

$$\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}) = \{w \in \Sigma^* : \text{es gibt } q \in Q \text{ mit } \langle q_0, w, \# \rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \varepsilon \rangle \}$$
$$= \{w \in \Sigma^* : \text{es gibt einen akzeptierenden Lauf für } w \text{ in } \mathcal{K} \}$$

akzeptierender Lauf für w in $\mathcal{K}$:

$$\underbrace{\langle p_0, w_0, y_0 \rangle}_{\langle q_0, w, \# \rangle} \vdash \langle p_1, w_1, y_1 \rangle \vdash \ldots \vdash \underbrace{\langle p_m, w_m, y_m \rangle}_{\langle q, \varepsilon, \varepsilon \rangle}$$

initiale Konfiguration d.h., $w_m = y_m = \varepsilon$

Beispiel: NKA mit Akzeptanz bei leerem Keller

NKA $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}) = \{ a^n b^n : n \geqslant 1 \}$

Zustandsraum	$Q = \{q_a, q_b\}$	Startzustand q_a
Eingabealphabet	$\Sigma = \{a, b\}$	
Kelleralphabet	$\Gamma = \{a, b, \#\}$	

Übergangsfunktion:

$$\delta(q_a, a, \#) = \{\langle q_a, a\rangle\}$$
$$\delta(q_a, a, a) = \{\langle q_a, aa\rangle\}$$
$$\delta(q_a, b, a) = \{\langle q_b, \varepsilon\rangle\}$$
$$\delta(q_b, b, a) = \{\langle q_b, \varepsilon\rangle\}$$

$\delta(\cdot) = \varnothing$ in allen anderen Fällen

Zustand q_a: “lese alle a’s und lege sie im Keller ab”

Zustand q_b: “entferne für jedes gelesene b ein a aus dem Keller”

Beispiel: Akzeptanz über Endzustände

NKA $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{L}(\mathcal{K}) = \{ a^n b^n : n \geqslant 1 \}$

Zustandsraum $Q = \{q_a, q_b, p\}$

Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b\}$ Startzustand q_a

Kelleralphabet $\Gamma = \{a, b, \#\}$ Endzustand p

$$\delta(q_a, a, \#) = \{\langle q_a, a\#\rangle\} \qquad \delta(q_b, b, a) = \{\langle q_b, \varepsilon\rangle\}$$

$$\delta(q_a, a, a) = \{\langle q_a, aa\rangle\} \qquad \delta(q_b, \varepsilon, \#) = \{\langle p, \#\rangle\}$$

$$\delta(q_a, b, a) = \{\langle q_b, \varepsilon\rangle\} \qquad \delta(\cdot) = \varnothing \text{ sonst}$$

Zustand q_a: lese die a's und lege sie im Keller ab, aber lasse das Kellerstartsymbol # unten im Keller liegen

Zustand q_b: für jedes gelesene b, entferne ein a aus dem Keller. Wechsle zu p, sobald # gelesen wird.

Beispiel: NKA für $\{ww^R : w \in \{0,1\}^*\}$

NKA $\mathcal{K}$ mit Akzeptanz bei leerem Keller

Zustandsraum $Q = \{q^+, q^-\}$

Anfangszustand q^+ $\qquad \Sigma = \{0,1\}$

Endzustände: irrelevant $\qquad \Gamma = \{0,1,\#\}$

Übergangsfunktion: für $a, b \in \{0,1\}$, $a \neq b$

$$\delta(q^+, \varepsilon, \#) = \{\langle q^-, \varepsilon\rangle\}$$
$$\delta(q^+, a, \#) = \{\langle q^+, a\#\rangle\}$$
$$\delta(q^+, a, a) = \{\langle q^+, aa\rangle, \langle q^-, \varepsilon\rangle\}$$
$$\delta(q^+, a, b) = \{\langle q^+, ab\rangle\}$$
$$\delta(q^-, a, a) = \delta(q^-, \varepsilon, \#) = \{\langle q^-, \varepsilon\rangle\}$$

$\delta(\cdot) = \varnothing$ in allen anderen Fällen