

Nun zur Korrektheit. Für den Nachweis, dass $L \subseteq \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$ ist zu zeigen, dass alle Wörter der Form ww^R einen akzeptierenden Lauf in \mathcal{K} haben. Für $\varepsilon = \varepsilon\varepsilon^R$ stellt der Übergang $\delta(q^+, \varepsilon, \#) = \{(q^-, \varepsilon)\}$ sicher, dass für das leere Eingabewort der Keller in einem Schritt geleert wird:

$$(q^+, \varepsilon, \#) \vdash (q^-, \varepsilon, \varepsilon)$$

Sei nun $w = va$, wobei $a \in \Sigma$ und $v \in \Sigma^*$. Dann gibt es einen akzeptierenden Lauf für ww^R folgender Form:

$$\begin{aligned} (q^+, ww^R, \#) \vdash^* (q^+, w^R, w^R\#) &= (q^+, av^R, av^R\#) \\ &\vdash (q^-, v^R, v^R\#) \vdash^* (q^-, \varepsilon, \#) \quad \vdash (q^-, \varepsilon, \varepsilon) \end{aligned}$$

Für die Inklusion $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}) \subseteq L$ ist zu zeigen, dass alle Wörter x , die einen akzeptierenden Lauf in \mathcal{K} haben, von der Gestalt ww^R sind. Wegen $\varepsilon \in L$ ist nur der Fall $x \neq \varepsilon$ von Interesse. Wir benutzen folgende Hilfsaussagen:

- (1) Aus $(q^-, u, v\#) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$ folgt $q^- = q$ und $u = v$. Dabei sind $u, v \in \{0, 1\}^*$.
- (2) Aus $(q^+, x, \#) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$ mit $x \neq \varepsilon$ folgt, dass die Gestalt $x = z\alpha u$ hat, wobei $z, u \in \{0, 1\}^*$ und $\alpha \in \{0, 1\}$.

Hilfsaussage (1) ergibt sich durch Inspektion der Übergänge für Zustand q^- . Hilfsaussage (2) ist wie folgt einsichtig. Mit allen Transitionen von q^+ , bei denen \mathcal{K} im Anfangszustand q^+ bleibt, werden Push-Operationen durchgeführt, bei denen das gelesene Zeichen a auf den Keller gelegt wird. Einzige Ausnahme ist die ε -Transition für Zustand q^+ und oberstes Kellersymbol $\#$. Diese ε -Transition ist zwar in der Anfangskonfiguration ausführbar, führt dann jedoch zu der terminalen, verwerfenden Konfiguration (q^+, x, ε) . In akzeptierenden Läufen für ein nicht-leeres Eingabewort x kann diese ε -Transitionen nicht eingesetzt werden. Eine Konfiguration, in der der Keller leer und die Eingabe komplett gelesen ist, ist nur dann von der Startkonfiguration $(q^+, x, \#)$ erreichbar, wenn \mathcal{K} nach Einlesen eines Präfixes von x in Zustand q^- wechselt. Dies ist aber nur dann möglich, wenn x die Form $z\alpha u$ hat, wobei $z, u \in \{0, 1\}^*$ und

$$(q^+, x, \#) \vdash^* (q^+, \alpha u, \alpha z^R\#) \vdash (q^-, u, z^R\#) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

Aus Aussage (1) folgt nun $u = z^R$ und somit $x = ww^R$, wobei $w = za$. ■

Jeder ε -NFA kann als Sonderfall eines NKA mit Akzeptanz über Endzustände aufgefasst werden. Ist nämlich $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, \{q_0\}, F)$ ein ε -NFA mit eindeutigen Anfangszustand q_0 , so erhält man einen NKA $\mathcal{K}_\mathcal{M}$ mit $\mathcal{L}(\mathcal{K}_\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{M})$ wie folgt:

$$\mathcal{K}_\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} (Q, \Sigma, \{\#\}, \delta', q_0, \#, F), \quad \text{wobei} \quad \delta'(q, a, \#) = \{(p, \#) : p \in \delta(q, a)\}$$

Die Annahme, dass der vorliegende ε -NFA einen eindeutigen Anfangszustand hat, ist keine Einschränkung, da jeder ε -NFA in einen äquivalenten ε -NFA mit genau einem Anfangszustand transformiert werden kann. Ebenso hätten wir in der Definition von Kellerautomaten eine Menge von Anfangszuständen zulassen können. Hinsichtlich der Ausdrucksstärke von NKA ist dies irrelevant.

Äquivalenz der Akzeptanzbedingungen

Es ist klar, dass die Sprachen $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ und $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$ i.A. nicht übereinstimmen. Z.B. wenn $F = \emptyset$, dann ist stets $\mathcal{L}(\mathcal{K}) = \emptyset$; während $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}) \neq \emptyset$ möglich ist. Dennoch sind die beiden Arten von Akzeptanzbedingungen äquivalent. Wir zeigen dies durch gegenseitige Simulationen.

Satz 3.22 (Von \mathcal{K}_ε zu \mathcal{K}_F). *Zu jedem NKA \mathcal{K}_ε mit Akzeptanz bei leerem Keller gibt es einen NKA \mathcal{K}_F mit Akzeptanz über Endzustände, so dass $\mathcal{L}(\mathcal{K}_\varepsilon) = \mathcal{L}(\mathcal{K}_F)$.*

Beweis. Sei $\mathcal{K}_\varepsilon = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ ein NKA mit Akzeptanz bei leerem Keller. Wir entwerfen einen NKA \mathcal{K}_F so, dass \mathcal{K}_F sich schrittweise wie \mathcal{K}_ε verhält und – sobald \mathcal{K}_ε eine akzeptierende Konfiguration $(q, \varepsilon, \varepsilon)$ erreicht – in einen speziellen Zustand q_F überwechselt, in dem \mathcal{K}_F akzeptierend anhält. Auch hier verwenden wir ein zusätzliches Kellersymbol $\$$, das während der Simulation ganz unten im Keller von \mathcal{K}_F liegt. Dieses benötigen wir, um zu verhindern, dass \mathcal{K}_F verwerfend anhält, wenn \mathcal{K}_ε akzeptiert. Wir definieren

$$\mathcal{K}_F \stackrel{\text{def}}{=} (Q \cup \{q'_0, q_F\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$, \delta', q'_0, \#, \{q_F\}\},$$

wobei $\$ \notin \Gamma$, $q'_0, q_F \notin Q$ und $q'_0 \neq q_F$. Die Übergangsfunktion δ' ist wie folgt definiert. Sei $a \in \Sigma$, $A \in \Gamma$ und $q \in Q$.

$$\begin{aligned} \delta'(q'_0, \varepsilon, \#) &= \{(q_0, \#\$\}) & \delta'(q, a, A) &= \delta(q, a, A) \\ \delta'(q, \varepsilon, \$) &= \{(q_F, \varepsilon)\} & \delta'(q, \varepsilon, A) &= \delta(q, \varepsilon, A) \end{aligned}$$

In allen verbleibenden Fällen ist $\delta'(\cdot) = \emptyset$. Man beachte, dass \mathcal{K}_F genau dann in den Endzustand q_F gelangen kann, wenn das Symbol $\$$ das oberste Kellersymbol ist; also wenn der Keller von \mathcal{K}_ε leer ist. Ist in diesem Fall die Eingabe zu Ende gelesen, akzeptieren \mathcal{K}_ε und \mathcal{K}_F . Andernfalls verwerfen \mathcal{K}_ε und \mathcal{K}_F das Eingabewort. Die Entscheidung, wann \mathcal{K}_F in den Zustand q_F übergeht, wird *deterministisch* gefällt. Diese Beobachtung wird später von Bedeutung sein, wenn wir deterministische Kellerautomaten betrachten. Es bleibt noch $\mathcal{L}(\mathcal{K}_F) = \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}_\varepsilon)$ nachzuweisen. Wir zeigen zuerst $\mathcal{L}(\mathcal{K}_F) \supseteq \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}_\varepsilon)$. Sei also $w \in \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}_\varepsilon)$. Dann gilt für ein $q \in Q$, dass $(q_0, w, \#) \vdash_{\mathcal{K}_\varepsilon}^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$. Dann ist $(q'_0, w, \#) \vdash_{\mathcal{K}_F} (q_0, w, \#\$\) \vdash_{\mathcal{K}_F}^* (q, \varepsilon, \$) \vdash_{\mathcal{K}_F} (q_F, \varepsilon, \varepsilon)$ ein akzeptierender Lauf für w in \mathcal{K}_F , also $w \in \mathcal{L}(\mathcal{K}_F)$. Sei nun $w \in \mathcal{L}(\mathcal{K}_F)$. Da der Endzustand q_F in \mathcal{K}_F nur beim Übergang $\delta'(q, \varepsilon, \$)$ erreicht werden kann, ist der akzeptierender Lauf für w in \mathcal{K}_F von der Gestalt $(q'_0, w, \#) \vdash_{\mathcal{K}_F} (q_0, w, \#\$\) \vdash_{\mathcal{K}_F}^* (q, \varepsilon, \$) \vdash_{\mathcal{K}_F} (q_F, \varepsilon, \varepsilon)$. Wegen der Konstruktion des Automaten mit Akzeptanz bei leerem Keller ist der induzierte Lauf in \mathcal{K}_ε : $(q_0, w, \#) \vdash_{\mathcal{K}_\varepsilon}^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$. Also ist $w \in \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}_\varepsilon)$. \square

Satz 3.23 (Von \mathcal{K}_F zu \mathcal{K}_ε). *Zu jedem NKA \mathcal{K}_F mit Akzeptanz über Endzustände gibt es einen NKA \mathcal{K}_ε mit Akzeptanz bei leerem Keller, so dass $\mathcal{L}(\mathcal{K}_F) = \mathcal{L}(\mathcal{K}_\varepsilon)$.*

Beweis. Sei $\mathcal{K}_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$ ein NKA mit Akzeptanz über Endzustände. Wir verwenden eine ähnliche Simulationsstrategie wie im Beweis von Satz 3.22 und konzipieren einen NKA \mathcal{K}_ε mit Akzeptanz bei leerem Keller, so dass \mathcal{K}_ε eine schrittweise Simulation von \mathcal{K}_F durchführt. Sobald der simulierte NKA \mathcal{K}_F eine akzeptierende Konfiguration (p, ε, x) , $p \in F$, erreicht, entleert \mathcal{K}_ε seinen Keller und akzeptiert ebenfalls. Um zu verhindern, dass nicht-akzeptierende Berechnungen

$$(q_0, w, \#) \vdash_{\mathcal{K}_F}^* (q, \varepsilon, \varepsilon), \text{ wobei } q \notin F,$$

zur Akzeptanz von \mathcal{K}_ε führen, verwenden wir ein zusätzliches Kellersymbol $\$,$ das stets ganz unten im Keller von \mathcal{K}_ε liegt und das nur dann entfernt wird, wenn \mathcal{K}_F eine akzeptierende Konfiguration $(p, \varepsilon, \chi), p \in F,$ erreicht. Wir definieren die Komponenten von \mathcal{K}_ε wie folgt. Der Zustandsraum von \mathcal{K}_ε besteht aus den Zuständen von \mathcal{K}_F und zwei weiteren Zuständen q'_0 und $q_F.$ Der Zustand q'_0 ist der Anfangszustand und dient lediglich dazu, \mathcal{K}_ε in eine Konfiguration zu bringen, die $\$$ als unterstes Element auf den Stack schreibt. Der Zustand q_F dient der Entleerung des Kellers sobald \mathcal{K}_F eine akzeptierende Endkonfiguration erreicht hat. Die formale Konstruktion von \mathcal{K}_ε erfolgt so, dass jeder akzeptierende Lauf

$$(q_0, w, \#) \vdash_{\mathcal{K}_F}^* (p, \varepsilon, A_1 \dots A_n), \text{ wobei } p \in F,$$

von \mathcal{K}_F einen akzeptierenden Lauf in \mathcal{K}_ε folgender Form induziert:

$$\begin{aligned} (q'_0, w, \#) \vdash_{\mathcal{K}_\varepsilon} (q_0, w, \#\$) & \vdash_{\mathcal{K}_\varepsilon}^* (p, \varepsilon, A_1 A_2 \dots A_n \$) \\ & \vdash_{\mathcal{K}_\varepsilon} (q_F, \varepsilon, A_2 \dots A_n \$) \\ & \vdash_{\mathcal{K}_\varepsilon}^* (q_F, \varepsilon, \$) \\ & \vdash_{\mathcal{K}_\varepsilon} (q_F, \varepsilon, \varepsilon). \end{aligned}$$

Die formale Definition von \mathcal{K}_ε ist nun wie folgt:

$$\mathcal{K}_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} (Q \cup \{q'_0, q_F\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$, \delta', q'_0, \#, \emptyset\})$$

wobei $\$ \notin \Gamma, q'_0, q_F \notin Q, q'_0 \neq q_F.$ Die Übergangsfunktion δ' ist wie folgt definiert. Seien $a \in \Sigma, A \in \Gamma$ und q, p Zustände in $\mathcal{K},$ so dass $q \notin F$ und $p \in F.$

$$\begin{aligned} \delta'(q'_0, \varepsilon, \#) &= \{(q_0, \#\$\}) & \delta'(q, a, A) &= \delta(q, a, A) \\ & & \delta'(q, \varepsilon, A) &= \delta(q, \varepsilon, A) \\ \delta'(q_F, \varepsilon, A) &= \{(q_F, \varepsilon)\} & \delta'(p, a, A) &= \delta(p, a, A) \\ \delta'(q_F, \varepsilon, \$) &= \{(q_F, \varepsilon)\} & \delta'(p, \varepsilon, A) &= \{(q_F, \varepsilon)\} \cup \delta(p, \varepsilon, A) \\ & & \delta'(p, \varepsilon, \$) &= \{(q_F, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

In allen verbleibenden Fällen ist $\delta'(\cdot) = \emptyset.$ Sobald sich \mathcal{K}_F in einem Endzustand $p \in F$ befindet und der Keller von \mathcal{K}_F nicht leer ist, dann entscheidet \mathcal{K}_ε *nichtdeterministisch,* ob die Simulation fortgeführt wird oder ob \mathcal{K}_ε in den Zustand q_F wechselt und dort (nach Entleerung des Kellers) anhält. Findet dieser ε -Übergang zu Zustand q_F zu früh (noch bevor die Eingabe vollständig gelesen wurde) statt, dann liegt eine verwerfende Berechnung von \mathcal{K}_ε vor. Ist die Eingabe bereits zu Ende gelesen, dann akzeptieren \mathcal{K}_F und $\mathcal{K}_\varepsilon.$ Dies liegt daran, dass in Zustand q_F ausschließlich ε -Transitionen möglich sind. Tatsächlich gilt nun $\mathcal{L}(\mathcal{K}_F) = \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}_\varepsilon),$ da es zu jedem akzeptierenden Lauf

$$(q_0, w, \#) \vdash_{\mathcal{K}_F}^* (p, \varepsilon, \chi), p \in F$$

von \mathcal{K}_F einen “entsprechenden” akzeptierenden Lauf $(q'_0, w, \#) \vdash_{\mathcal{K}_\varepsilon}^* (q', \varepsilon, \varepsilon)$ von \mathcal{K}_ε gibt, wobei $q' \in Q \cup \{q'_0, q_F\}.$ Umgekehrt gibt es zu jedem akzeptierenden Lauf in \mathcal{K}_ε einen “entsprechenden” akzeptierenden Lauf in $\mathcal{K}_F.$ \square

Äquivalenz von NKA und kontextfreien Grammatiken

Die Formalismen der CFG und des Automatenmodells NKA sind äquivalent. Für den Nachweis wird gezeigt, dass für jeden NKA mit Akzeptanz bei leerem Keller eine CFG konstruiert wird, so dass die erzeugte Sprache der CFG und die akzeptierte Sprache des NKA gleich sind. Aus einer gegebenen CFG wird ein NKA konstruiert, indem der Herleitungsprozess, der durch die Linksableitungen einer CFG in Greibach-Normalform gegeben ist, in naheliegender Weise durch einen NKA vorgenommen wird (vergleiche Kapitel 3.5.1).

Satz 3.24 (Von Greibach NF zu NKA). *Zu jeder CFG G in Greibach Normalform gibt es einen NKA \mathcal{K} mit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$.*

Beweis. Sei $G = (V, \Sigma, \mathcal{P}, S)$ eine CFG in Greibach Normalform. Wir definieren einen NKA \mathcal{K} mit nur einem Zustand q_0 und ohne ε -Transitionen. Die Idee dabei ist, dass jede Regel $A \rightarrow \alpha B_1 \dots B_k$ von G einem Übergang von \mathcal{K} entspricht.

$$\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} (\{q_0\}, \Sigma, V, \delta, q_0, S),$$

wobei

$$\delta(q_0, \alpha, A) = \{(q_0, B_1 \dots B_k) : A \rightarrow \alpha B_1 \dots B_k\}$$

für alle $\alpha \in \Sigma$ und $A \in V$. Die Behandlung einer Terminalregel $A \rightarrow \alpha$ ergibt sich aus $k=0$. Sie induziert also das Paar $(q_0, \varepsilon) \in \delta(q_0, \alpha, A)$.

Der Nachweis für $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}) = \mathcal{L}(G)$ kann erbracht werden, indem man zunächst durch Induktion nach n zeigt, dass für alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Sigma$, $x \in \Sigma^*$, $A_1, \dots, A_\ell \in V$ gilt:

$$(q_0, \alpha_1 \dots \alpha_n x, S) \vdash^n (q_0, x, A_1 \dots A_\ell) \quad \text{gdw} \quad S \Rightarrow_{\perp}^n \alpha_1 \dots \alpha_n A_1 \dots A_\ell$$

Dabei steht \Rightarrow_{\perp}^n für die Linksherleitbarkeit mit n Herleitungsschritten. Entsprechend steht \vdash^n für die “ n -Schritt-Konfigurationsrelation”. Da \mathcal{K} keine ε -Transitionen hat, gilt für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ der Länge n :

$$(q_0, w, S) \vdash^* (q_0, \varepsilon, y) \quad \text{gdw} \quad (q_0, w, S) \vdash^n (q_0, \varepsilon, y).$$

Da G in Greibach Normalform ist, bestehen alle Herleitungen eines Worts $w \in \mathcal{L}(G)$ mit $|w| = n$ aus genau n Regelanwendungen. Daher gilt $S \Rightarrow_{\perp}^n w$ genau dann, wenn $S \Rightarrow^* w$ für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ der Länge n . Mit $x = \varepsilon$, $w = \alpha_1 \dots \alpha_n$, $\ell = 0$ folgt daher aus dem oben angegebenen Zusammenhang zwischen \Rightarrow_{\perp}^n und \vdash^n :

$$\begin{aligned} w \in \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}) & \quad \text{gdw} \quad (q_0, w, S) \vdash^* (q_0, \varepsilon, \varepsilon) \\ & \quad \text{gdw} \quad (q_0, w, S) \vdash^n (q_0, \varepsilon, \varepsilon) \\ & \quad \text{gdw} \quad S \Rightarrow_{\perp}^n w \\ & \quad \text{gdw} \quad S \Rightarrow^* w \\ & \quad \text{gdw} \quad w \in \mathcal{L}(G) \end{aligned}$$

Also stimmen $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$ und $\mathcal{L}(G)$ überein. □

Der im Beweis von Satz 3.24 angegebene NKA hat nur einen Zustand und keine ε -Transitionen. Der nichtdeterministische Ableitungsprozess jeder kontextfreien Grammatik lässt sich also mit einem NKA mit nur *einem* Zustand simulieren, der in jedem Schritt ein Zeichen des Eingabeworts “konsumiert”.

Beispiel 3.25 (Von Greibach NF zu NKA). Die CFG mit den Regeln

$$S \rightarrow aSA \mid bSB \mid aB \mid bAAA, \quad A \rightarrow a, \quad B \rightarrow b$$

ist in Greibach Normalform. Der gemäß Satz 3.24 konstruierte NKA hat folgende Gestalt: $\mathcal{K} = (\{q_0\}, \{a, b\}, \{A, S, B\}, \delta, q_0, S, \emptyset)$, wobei

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, S) &= \{(q_0, SA), (q_0, B)\} & \delta(q_0, b, S) &= \{(q_0, SB), (q_0, AAA)\} \\ \delta(q_0, a, A) &= \{(q_0, \varepsilon)\} & \delta(q_0, b, B) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

Z.B. entspricht die Linksableitung $S \Rightarrow_L aSA \Rightarrow_L aaBA \Rightarrow_L aabA \Rightarrow_L aaba$ der akzeptierenden Berechnung

$$(q_0, aaba, S) \vdash (q_0, aba, SA) \vdash (q_0, ba, BA) \vdash (q_0, a, A) \vdash (q_0, \varepsilon, \varepsilon) \quad \blacksquare$$

Wir zeigen nun, dass auch umgekehrt zu jedem Kellerautomaten \mathcal{K} mit Akzeptanz bei leerem Keller eine kontextfreie Grammatik konstruiert werden kann, die die Sprache $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$ erzeugt. Aufgrund der Äquivalenz der Akzeptanzbedingungen “über Endzustände” und “bei leerem Keller” gilt dieselbe Aussage auch für die NKA-Sprachen $\mathcal{L}(\mathcal{K})$.

Satz 3.26 (Von NKA zu CFG). *Zu jedem NKA \mathcal{K} gibt es eine CFG G mit $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}) = \mathcal{L}(G)$.*

Beweis. Sei $\mathcal{K} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ ein NKA mit Akzeptanz bei leerem Keller. Die Idee für die Konstruktion einer äquivalenten kontextfreien Grammatik G besteht darin, alle Tripel $\langle q, A, p \rangle \in Q \times \Gamma \times Q$ als Nichtterminale zu verwenden und das Produktionssystem so zu definieren, dass für alle Wörter $w \in \Sigma^*$, Kellersymbole $A \in \Gamma$ und Zustände $q, p \in Q$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} \langle q, A, p \rangle \Rightarrow^* w & \text{gdw} & (q, w, A) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon) & (*) \\ \uparrow & & \uparrow & \\ \text{Herleitung} & & \text{Konfigurations-} & \\ \text{in } G & & \text{übergänge in } \mathcal{K} & \end{array}$$

Die Bedingung rechts in Aussage (*), also $(q, w, A) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$, ist äquivalent zu der Aussage, dass der NKA \mathcal{K} die Konfiguration (q, wu, Az) in (p, u, z) überführen kann, wobei mit Ausnahme des letzten Konfigurationswechsels kein Zugriff auf die Kellerzellen, in denen z ablegt ist, erfolgt. Dabei sind $u \in \Sigma^*$ und $z \in \Gamma^*$ beliebige Wörter über dem Eingabe- bzw. Kelleralphabet. Die Definition von G unterliegt nun der Idee, akzeptierende Läufe von \mathcal{K} in Lauffragmente $(p_{i-1}, u_{i-1}, z_{i-1}) \vdash^* (p_i, u_i, z_i)$ zu zerlegen, wobei $z_{i-1} = B_i z_i$ mit $B_i \in \Gamma$ und u_i ein Suffix von u_{i-1} ist, in denen – abgesehen vom letzten Konfigurationswechsel – die Kellerzellen, in denen die Symbole von z_i liegen, unberührt bleiben. Die Grammatik G kann solche Lauffragmente gemäß (*) durch Ableitungen der Form $\langle p_{i-1}, B_i, p_i \rangle \Rightarrow^* w_i$ simulieren, wobei w_i dasjenige Präfix von u_{i-1} ist, für welches $u_{i-1} = w_i u_i$ gilt.

Die formale Definition der Komponenten von G ist wie folgt. Die Variablenmenge ist $V = \{S\} \cup Q \times \Gamma \times Q$, wobei S als Startsymbol fungiert. Das Terminalalphabet von G ist das Eingabealphabet Σ von \mathcal{K} . Das Produktionssystem von G besteht aus folgenden Regeln:

- Startregeln: $S \rightarrow \langle q_0, \#, p \rangle$ für jeden Zustand $p \in Q$
- Regeln zur Simulation der Transitionen von \mathcal{K} :
 1. Lesen eines Eingabezeichens mit Push-Operationen:
für jeden Übergang $(r, B_1 B_2 \dots B_n) \in \delta(q, a, A)$, wobei $n \geq 1$, $B_1, \dots, B_n \in \Gamma$ und $a \in \Sigma$, enthält G die Regeln

$$\langle q, A, p \rangle \rightarrow a \langle r, B_1, p_1 \rangle \langle p_1, B_2, p_2 \rangle \dots \langle p_{n-1}, B_n, p \rangle,$$

wobei $p_1, \dots, p_{n-1} \in Q$.

2. Lesen eines Eingabezeichens ohne Push-Operationen:
für jeden Übergang $(p, \varepsilon) \in \delta(q, a, A)$ und $a \in \Sigma$, enthält G die Regel $\langle q, A, p \rangle \rightarrow a$.
3. ε -Transition mit Push-Operationen:
für alle $(r, B_1 B_2 \dots B_n) \in \delta(q, \varepsilon, A)$, wobei $n \geq 1$, $B_1, \dots, B_n \in \Gamma$ und $a \in \Sigma$, enthält G die Regeln

$$\langle q, A, p \rangle \rightarrow \langle r, B_1, p_1 \rangle \langle p_1, B_2, p_2 \rangle \dots \langle p_{n-1}, B_n, p \rangle,$$

wobei $p_1, \dots, p_{n-1} \in Q$.

4. ε -Transition ohne Push-Operationen:
für alle $(p, \varepsilon) \in \delta(q, \varepsilon, A)$ und $a \in \Sigma$, enthält G die ε -Regel $\langle q, A, p \rangle \rightarrow \varepsilon$.

In 1., 2., 3. und 4. sind $q, p \in Q$ beliebige Zustände und $A \in \Gamma$ ein beliebiges Kellersymbol. Die Korrektheit dieser Grammatik kann wie folgt nachgewiesen werden. Aussage (*) kann durch Induktion über die Länge einer Herleitung in G (Implikation " \implies ") bzw. Länge eines akzeptierenden Laufs in \mathcal{K} (Implikation " \longleftarrow ") nachgewiesen werden. Die weitere Argumentation für den Nachweis, dass $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$, ist dann wie folgt.

Wir beginnen mit der Inklusion " \subseteq ". Wir nehmen zunächst an, dass $w \in \mathcal{L}(G)$. Dann gilt $S \Rightarrow^* w$. Also muss es eine Startregel $S \rightarrow \langle q_0, \#, p \rangle$ geben, so dass $\langle q_0, \#, p \rangle \Rightarrow^* w$. Wegen Aussage (*) gilt dann $(q_0, w, \#) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$ und somit $w \in \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$.

Die Inklusion " \supseteq " kann mit analogen Argumenten nachgewiesen werden. Ist $w \in \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$, so gibt es einen Zustand $p \in Q$ mit $(q_0, w, \#) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$. Wegen Aussage (*) gilt dann $\langle q_0, \#, p \rangle \Rightarrow^* w$. Also ist durch $S \Rightarrow \langle q_0, \#, p \rangle \Rightarrow^* w$ eine Herleitung von w in G gegeben.

Nun zum induktiven Nachweis von Aussage (*). Exemplarisch zeigen wir die Implikation " \implies ". Im Induktionsanfang nehmen wir an, dass $\langle q, A, p \rangle \Rightarrow w$ (Ableitung der Länge $k = 1$). Dies ist nur dann möglich, wenn

- entweder $w = a \in \Sigma$ und die Regel $\langle q, A, p \rangle \rightarrow a$ zur Simulation des Lesens eines Eingabezeichens ohne Push-Operation eingesetzt wurde
- oder wenn $w = \varepsilon$ und die Regel $\langle q, A, p \rangle \rightarrow \varepsilon$ zur Simulation einer ε -Transition ohne Push-Operation angewandt wurde.

Im ersten Fall gilt $(p, \varepsilon) \in \delta(q, a, A)$ und somit $(q, a, A) \vdash (p, \varepsilon, \varepsilon)$. Im zweiten Fall gilt $(p, \varepsilon) \in \delta(q, \varepsilon, A)$ und $(q, \varepsilon, A) \vdash (p, \varepsilon, \varepsilon)$. Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass eine Ableitung von w mit $k+1$ Regelanwendungen vorliegt, wobei $k \geq 1$. Etwa:

$$\langle q, A, p \rangle \Rightarrow x \Rightarrow^k w, \quad \text{wobei } x \in (V \cup \Sigma)^+ \text{ wenigstens eine Variable enth\u00e4lt}^{10}$$

Wegen $k \geq 1$ muss sich der erste Herleitungsschritt auf die Anwendung einer Regel zur Simulation eines Konfigurationswechsels von \mathcal{K} mit Push-Operationen beziehen. Etwa die Regel

$$\langle q, A, p \rangle \rightarrow \underbrace{a \langle r, B_1, p_1 \rangle \langle p_1, B_2, p_2 \rangle \dots \langle p_{n-1}, B_n, p \rangle}_{=x}$$

Dann hat w die Form $aw_1w_2\dots w_n$, wobei $\langle p_{i-1}, B_i, p_i \rangle \Rightarrow^{k_i} w_i$ f\u00fcr $1 \leq i \leq n$. und $k = k_1 + \dots + k_n$. Dabei ist $r = p_0$ und $p_n = p$. (Die Existenz einer solchen Zerlegung von w folgt z.B. durch die Betrachtung eines Ableitungsbaums. Die W\u00f6rter w_i sind durch die Bl\u00e4tter im Teilbaum von B_i gegeben.) Wegen $k_i \leq k$ k\u00f6nnen wir nun die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten

$$(p_{i-1}, w_i, B_i) \vdash^* (p_i, \varepsilon, \varepsilon) \quad \text{f\u00fcr } 1 \leq i \leq n.$$

Diese Konfigurationswechsel in \mathcal{K} k\u00f6nnen nun kombiniert werden:

$$\begin{aligned} (q, w, A) = (q, aw_1w_2\dots w_n, A) &\vdash (r, w_1w_2\dots w_n, B_1B_2\dots B_n) \\ &\vdash^* (p_1, w_2\dots w_n, B_2\dots B_n) \\ &\vdots \\ &\vdash^* (p_{n-1}, w_n, B_n) \\ &\vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon) \end{aligned}$$

Die Beweisrichtung " \Leftarrow " folgt analogen Argumenten. □

Beispiel 3.27 (Von NKA zu CFG). Die kontextfreie Sprache $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$ ist die vom Kellerautomaten $\mathcal{K} = (\{q_a, q_b\}, \{a, b\}, \{B, \#\}, \delta, q_a, \#)$ akzeptierte Sprache, wobei

$$\begin{aligned} \delta(q_a, a, \#) &= \{(q_a, B)\} & \delta(q_a, b, B) &= \{(q_b, \varepsilon)\} \\ \delta(q_a, a, a) &= \{(q_a, BB)\} & \delta(q_b, b, B) &= \{(q_b, \varepsilon)\}, \end{aligned}$$

d. h. , $L = \mathcal{L}(\mathcal{K})$ (vergleiche 3.20 auf Seite 96). Aus der Konstruktion im Satz 3.26 erhalten wir die Grammatik $G = (V, \{B, \#\}, \mathcal{P}, S)$ mit $V = \{S\} \cup \{q_a, q_b\} \times \{B, \#\} \times \{q_a, q_b\}$ (damit gibt es 9 Variablen in der Grammatik G) und den Regeln

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \langle q_a, \#, q_a \rangle \mid \langle q_a, \#, q_b \rangle \\ \langle q_a, \#, q_a \rangle &\rightarrow a \langle q_a, B, q_a \rangle & \langle q_a, \#, q_b \rangle &\rightarrow a \langle q_a, B, q_b \rangle \\ \langle q_a, B, p \rangle &\rightarrow a \langle q_a, B, p_1 \rangle \langle p_1, B, p \rangle, \text{ wobei } p, p_1 \in \{q_a, q_b\} \\ \langle q_a, B, q_b \rangle &\rightarrow b & \langle q_b, B, q_b \rangle &\rightarrow b \end{aligned}$$

Beispielsweise entspricht der akzeptierende Lauf

$$(q_a, ab, \#) \vdash (q_a, b, B) \vdash (q_b, \varepsilon, \varepsilon)$$

¹⁰Das Symbol \Rightarrow^k steht f\u00fcr die Ableitbarkeit mit genau k Ableitungsschritten.

der simulierten Linksableitung in G :

$$S \Rightarrow \langle q_a, \#, q_b \rangle \Rightarrow a \langle q_a, B, q_b \rangle \Rightarrow ab.$$

■