

$$\text{NKA } \mathcal{K} = (\{q^+, q^-\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \#\}, \delta, q^+, \#)$$

$$\delta(q^+, \varepsilon, \#) = \{\langle q^-, \varepsilon \rangle\}$$

$$\delta(q^+, a, \#) = \{\langle q^+, a\# \rangle\}$$

für $a, b \in \{0, 1\}$
mit $a \neq b$

$$\delta(q^+, a, a) = \{\langle q^+, aa \rangle, \langle q^-, \varepsilon \rangle\}$$

$$\delta(q^+, a, b) = \{\langle q^+, ab \rangle\}$$

$$\delta(q^-, a, a) = \delta(q^-, \varepsilon, \#) = \{\langle q^-, \varepsilon \rangle\}$$

Behauptung: $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}) = \{ww^R : w \in \{0, 1\}^*\}$

Behauptung: $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}) = \{ ww^R : w \in \{0,1\}^* \}$

Beweis von " \supseteq ": durch Angabe akzeptierender Läufe für die Wörter ww^R mit $w \in \{0,1\}^*$

1. akzeptierender Lauf für $\varepsilon = \varepsilon\varepsilon^R$:

$$\langle q^+, \varepsilon, \# \rangle \vdash \langle q^-, \varepsilon, \varepsilon \rangle$$

2. akzeptierender Lauf für ww^R , wobei $w \in \{0,1\}^+$:
sei $w = va$ mit $v \in \{0,1\}^*$ und $a \in \{0,1\}$

$$\begin{aligned} \langle q^+, ww^R, \# \rangle &\vdash^* \langle q^+, w^R, w^R \# \rangle = \langle q^+, av^R, av^R \# \rangle \\ &\vdash \langle q^-, v^R, v^R \# \rangle \vdash^* \langle q^-, \varepsilon, \# \rangle \\ &\vdash \langle q^-, \varepsilon, \varepsilon \rangle \end{aligned}$$

Behauptung: $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}) = \{ ww^R : w \in \{0,1\}^* \}$

Beweis von " \subseteq ": für alle $u, x, v \in \{0,1\}^*$ gilt:

(1) Aus $\langle q^-, u, v\# \rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \varepsilon \rangle$ folgt: $u = v$
und $q = q^-$

(2) Aus $\langle q^+, x, \# \rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \varepsilon \rangle$ mit $x \neq \varepsilon$ folgt:

$x = zaa u$ mit $z, u \in \{0,1\}^*$, $a \in \{0,1\}$ und

$$\langle q^+, x, \# \rangle \vdash^* \langle q^+, au, az^R\# \rangle$$
$$\vdash \langle q^-, u, z^R\# \rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \varepsilon \rangle$$

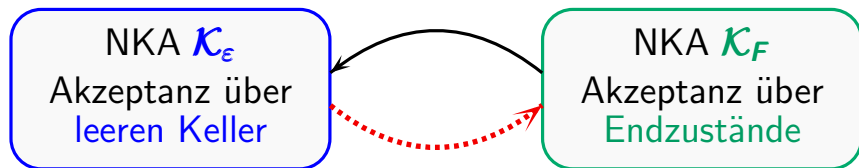
Aus (1) folgt $u = z^R$. Also $x = ww^R$ mit $w = za$.

1. Teil: Zu jedem NKA \mathcal{K}_ϵ mit Akzeptanz bei leerem Keller gibt es einen äquivalenten NKA \mathcal{K}_F mit Akzeptanz über Endzustände.

2. Teil: Zu jedem NKA \mathcal{K}_F mit Akzeptanz über Endzustände gibt es einen äquivalenten NKA \mathcal{K}_ϵ mit Akzeptanz bei leerem Keller.

Äquivalenz von \mathcal{K}_F und \mathcal{K}_ϵ :

Gleichheit der akzeptierten Sprachen,
d.h., $\mathcal{L}(\mathcal{K}_F) = \mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{K}_\epsilon)$



NKA \mathcal{K}_F simuliert \mathcal{K}_E wie folgt:

1. \mathcal{K}_F legt Sondersymbol $\$$ auf den Kellerboden
2. \mathcal{K}_F simuliert schrittweise \mathcal{K}_E
3. \mathcal{K}_F wechselt in Endzustand, sobald das Symbol $\$$ das oberste Kellersymbol ist

gegeben: NKA $\mathcal{K}_\varepsilon = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$
 mit Akzeptanz über leeren Keller

gesucht: NKA \mathcal{K}_F mit Akzeptanz über Endzustände,
 so dass $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}_\varepsilon) = \mathcal{L}(\mathcal{K}_F)$

NKA $\mathcal{K}_F = (Q \cup \{q'_0, q_F\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \delta', q'_0, \#, \{q_F\})$

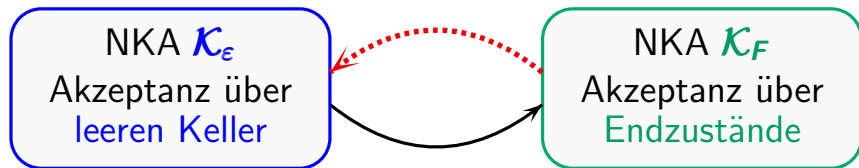
$$\delta'(q'_0, \varepsilon, \#) = \{\langle q_0, \#\$\rangle\}$$

$$\delta'(q, a, A) = \delta(q, a, A) \quad \text{für alle } q \in Q$$

$$\delta'(q, \varepsilon, A) = \delta(q, \varepsilon, A) \quad a \in \Sigma, A \in \Gamma$$

$$\delta'(q, \varepsilon, \$) = \{\langle q_F, \varepsilon \rangle\}$$

$\delta'(\cdot) = \emptyset$ in allen restlichen Fällen



NKA \mathcal{K}_E simuliert \mathcal{K}_F wie folgt:

1. \mathcal{K}_E legt Sondersymbol $\$$ auf den Kellerboden
2. \mathcal{K}_E simuliert schrittweise \mathcal{K}_F
3. Sobald ein Endzustand von \mathcal{K}_F erreicht ist, entscheidet \mathcal{K}_E nichtdeterministisch, die Simulation fortzusetzen oder den Keller zu entleeren

gegeben: NKA $\mathcal{K}_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$

Definition des NKA \mathcal{K}_ϵ :

$$\mathcal{K}_\epsilon = (Q \cup \{q'_0, q_F\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \delta', q'_0, \#)$$

$$\delta'(q'_0, \epsilon, \#) = \{\langle q_0, \# \$ \rangle\}$$

$$\delta'(q, a, A) = \delta(q, a, A)$$

$$\delta'(q, \epsilon, A) = \delta(q, \epsilon, A)$$

$$\delta'(p, a, A) = \delta(p, a, A)$$

$$\delta'(p, \epsilon, A) = \delta(p, \epsilon, A) \cup \{\langle q_F, \epsilon \rangle\}$$

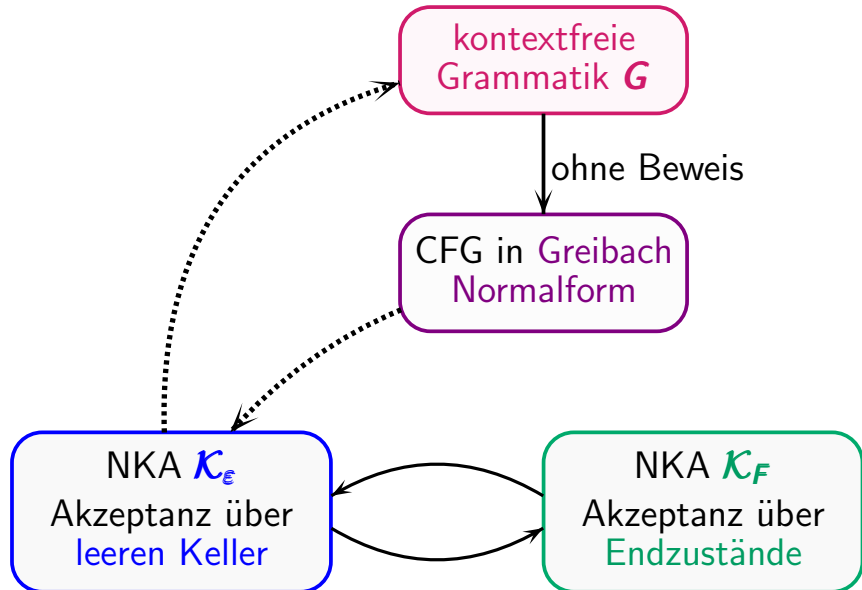
$$\delta'(p, \epsilon, \$) = \{\langle q_F, \epsilon \rangle\}$$

$$\delta'(q_F, \epsilon, A) = \delta'(q_F, \epsilon, \$) = \{\langle q_F, \epsilon \rangle\}$$

für $a \in \Sigma, A \in \Gamma$

$q \in Q \setminus F$

$p \in F$



CFG G in Greibach Normalform

$$S \rightarrow aSB \mid aB \quad B \rightarrow b$$

Betrachte die Linksableitung:

$$S \Rightarrow_L aSB \Rightarrow_L aaBB \Rightarrow_L aabB \Rightarrow_L aabb$$

Simuliere diese mit den Konfigurationswechseln eines NKA mit Akzeptanz bei leerem Keller

- Kellularphabet $\Gamma = \{S, B\}$
- Kellerstartsymbol $\# = S$
- 1 Zustand q_0

Zu jeder kontextfreien Grammatik G in Greibach NF gibt es einen NKA \mathcal{K} , so dass $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$

Beweis: Sei $G = (V, \Sigma, \mathcal{P}, S)$ eine CFG in Greibach NF

Definiere NKA mit Akzeptanz bei leerem Keller:

$$\mathcal{K} = (\{q_0\}, \Sigma, V, \delta, q_0, S)$$

$$\delta(q_0, a, A) = \{ \langle q_0, B_1 \dots B_k \rangle : A \rightarrow aB_1 \dots B_k \}$$

$$\langle q_0, \varepsilon \rangle, \text{ falls } k = 0, \\ \text{d.h., } A \rightarrow a$$

Zu jedem NKA \mathcal{K} gibt es eine kontextfreie Grammatik G mit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$.

Sei $\mathcal{K} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ ein NKA.

Idee für die Konstruktion von G :

Variablen von G sind Tripel $\langle q, A, p \rangle$, so dass für alle Wörter $w \in \Sigma^*$:

$$\langle q, A, p \rangle \Longrightarrow^* w \quad \text{gdw} \quad (q, w, A) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

wobei q, p Zustände von \mathcal{K} und A ein Kellersymbol

Definition von G

1213

CFG $G = (V, \Sigma, \mathcal{P}, S)$ mit $V = \{S\} \cup Q \times \Gamma \times Q$

Startregeln: $S \rightarrow \langle q_0, \#, p \rangle$ für alle $p \in Q$

Für alle $(r, B_1 \dots B_n) \in \delta(q, a, A)$ und $p_1, \dots, p_{n-1} \in Q$:

$$\langle q, A, p \rangle \rightarrow a \langle r, B_1, p_1 \rangle \langle p_1, B_2, p_2 \rangle \dots \langle p_{n-1}, B_n, p \rangle$$

Sonderfall $n = 0$: $\langle q, A, p \rangle \rightarrow a$, falls $(p, \varepsilon) \in \delta(q, a, A)$

Für alle $(r, B_1 \dots B_n) \in \delta(q, \varepsilon, A)$ und $p_1, \dots, p_{n-1} \in Q$:

$$\langle q, A, p \rangle \rightarrow \langle r, B_1, p_1 \rangle \langle p_1, B_2, p_2 \rangle \dots \langle p_{n-1}, B_n, p \rangle$$

Sonderfall $n = 0$: $\langle q, A, p \rangle \rightarrow \varepsilon$, falls $(p, \varepsilon) \in \delta(q, \varepsilon, A)$

NKA $\mathcal{K} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$
Akzeptanz bei leerem Keller



CFG $G = (G, \Sigma, \mathcal{P}, \{S\})$ mit
 $V = \{S\} \cup Q \times \Gamma \times Q, \mathcal{P} = \dots$

Korrektheit: $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}) = \mathcal{L}(G)$

zentrale Hilfsaussage:

$\langle q, A, p \rangle \implies^* w$ gdw $(q, w, A) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$

für alle $q, p \in Q$ und $A \in \Gamma$

NKA \mathcal{K} mit $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}) = \{ a^n b^n : n \geq 1 \}$

$$\mathcal{K} = (\{q_a, q_b\}, \{a, b\}, \{B, \#\}, \delta, q_a, \#)$$

$$\delta(q_a, a, \#) = \{(q_a, B)\} \quad \delta(q_a, b, B) = \{(q_b, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_a, a, B) = \{(q_a, BB)\} \quad \delta(q_b, b, B) = \{(q_b, \varepsilon)\}$$

CFG G mit dem Alphabet $\{a, b\}$: Variablen S und

$$\begin{array}{ll} \langle q_a, A, q_a \rangle & \langle q_b, A, q_a \rangle \\ \langle q_a, A, q_b \rangle & \langle q_b, A, q_b \rangle \end{array} \quad \text{wobei } A \in \{B, \#\}$$

zwei Startregeln: $S \rightarrow \langle q_a, \#, q_a \rangle \mid \langle q_a, \#, q_b \rangle$

NKA \mathcal{K} mit $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}) = \{ a^n b^n : n \geq 1 \}$

$$\mathcal{K} = (\{q_a, q_b\}, \{a, b\}, \{B, \#\}, \delta, q_a, \#)$$

$$\delta(q_a, a, \#) = \{(q_a, B)\} \quad \delta(q_a, b, B) = \{(q_b, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_a, a, B) = \{(q_a, BB)\} \quad \delta(q_b, b, B) = \{(q_b, \varepsilon)\}$$

Regeln zur Simulation der Übergänge von \mathcal{K} :

$$\langle q_a, \#, q_a \rangle \rightarrow a \langle q_a, B, q_a \rangle \quad \langle q_a, \#, q_b \rangle \rightarrow a \langle q_a, B, q_b \rangle$$

$$\langle q_a, B, p \rangle \rightarrow a \langle q_a, B, p_1 \rangle \langle p_1, B, p \rangle \quad \text{für } p, p_1 \in \{q_a, q_b\}$$

$$\langle q_a, B, q_b \rangle \rightarrow b \quad \langle q_b, B, q_b \rangle \rightarrow b$$