

Das folgende Corollar beruht auf einer Kombination der vorangegangenen Ergebnisse:

Corollar 3.28 (Charakterisierung kontextfreier Sprachen). *Sei L eine Sprache. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (a) L ist kontextfrei, d.h. $L = \mathcal{L}(G)$ für eine CFG G .
- (b) $L = \mathcal{L}(\mathcal{K})$ für einen NKA \mathcal{K} .
- (c) $L = \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}_\varepsilon)$ für einen NKA \mathcal{K}_ε .

Da für die Konstruktion eines NKA für gegebene kontextfreie Grammatik in Greibach Normalform ein NKA mit nur einem Zustand und ohne ε -Transitionen ausreichend ist, ist jeder Kellerautomat \mathcal{K} äquivalent zu einem Kellerautomaten mit Akzeptanz bei leerem Keller, der nur einen Zustand hat. Auch auf ε -Transitionen kann verzichtet werden, sofern das leere Wort nicht in der akzeptierten Sprache von \mathcal{K} liegt.

In Abschnitt 3.4.1 (Seite 87) haben wir mit Hilfe des Pumping Lemmas nachgewiesen, dass die Sprache $L = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ nicht kontextfrei ist. Mit Corollar 3.28 können wir hierfür eine intuitive Erklärung geben. Liegt einem NKA ein Eingabewort der Form $a^n b^n c^n$ vor, dann kann er die führenden a 's in seinem Keller ablegen und diese beim Lesen der b 's entfernen. Nach dem Lesen der b 's ist der Keller jedoch leer. Die Information über die Anzahl n der gelesenen a 's bzw. b 's steht bei der Bearbeitung der c 's nicht mehr zur Verfügung. Derartig intuitive Argumentationen helfen oftmals einzuschätzen, ob eine Sprache kontextfrei ist oder nicht. Selbstverständlich ersetzen sie keinen formalen Beweis.

Durchschnitt zwischen kontextfreien und regulären Sprachen. In Abschnitt 3.4.2 (Seite 88 ff) haben wir gesehen, dass die Klasse der kontextfreien Sprachen *nicht* unter der Durchschnittsbildung abgeschlossen ist. Dennoch ist der Durchschnitt einer kontextfreien Sprache mit einer regulären Sprache stets kontextfrei. Wir können hierfür ähnlich wie für reguläre Sprachen verfahren und das *Produkt* eines NKA mit einem NFA bilden; dieses ist ein NKA für die Durchschnittssprache.

Lemma 3.29. *Ist L_1 eine kontextfreie und L_2 eine reguläre Sprache, so ist $L_1 \cap L_2$ kontextfrei.*

Beweis. Sei $\mathcal{K} = (Q_1, \Sigma, \Gamma, \delta_1, q_{0,1}, \#, F_1)$ ein NKA mit $\mathcal{L}(\mathcal{K}) = L_1$ und $\mathcal{M} = (Q_2, \Sigma, \delta_2, \{q_{0,2}\}, F_2)$ ein NFA mit $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = L_2$, der genau einen Anfangszustand hat. Wir definieren das Produkt aus \mathcal{K} und \mathcal{M} als NKA:

$$\mathcal{K} \otimes \mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \Gamma, \delta, \langle q_{0,1}, q_{0,2} \rangle, \#, F_1 \times F_2),$$

wobei die Übergangsfunktion δ des Produkt-NKA wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} \delta(\langle q_1, q_2 \rangle, a, A) &= \{ \langle q'_1, q'_2 \rangle, x \} : (q'_1, x) \in \delta_1(q_1, a, A) \text{ und } q'_2 \in \delta_2(q_2, a) \} \\ \delta(\langle q_1, q_2 \rangle, \varepsilon, A) &= \{ \langle q'_1, q_2 \rangle, x \} : (q'_1, x) \in \delta_1(q_1, \varepsilon, A) \} \end{aligned}$$

Ähnlich wie für die Korrektheit der Produktkonstruktion für endliche Automaten kann nun gezeigt werden, dass tatsächlich $\mathcal{L}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{M})$ gilt. \square

3.5.3 Deterministische Kellerautomaten

Deterministische Kellerautomaten (DKA) sind NKA, in denen der jeweils nächste Schritt eindeutig festgelegt ist. Da wir die ε -Transitionen beibehalten möchten, müssen wir fordern, dass für jeden Zustand q , jedes Zeichen $a \in \Sigma$ und jedes Bandsymbol A die Menge $\delta(q, a, A) \cup \delta(q, \varepsilon, A)$ höchstens einelementig ist. Dies stellt sicher, dass jede Konfiguration höchstens eine Folgekonfiguration hat.

Definition 3.30 (Deterministischer Kellerautomat (DKA)). Ein DKA ist ein NKA $\mathcal{K} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$, so dass für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$ und $A \in \Gamma$ gilt:

- (1) $|\delta(q, a, A)| \leq 1$
- (2) $|\delta(q, \varepsilon, A)| \leq 1$
- (3) Aus $\delta(q, \varepsilon, A) \neq \emptyset$ folgt $\delta(q, a, A) = \emptyset$.

Eine Sprache L heißt *deterministisch kontextfrei*, falls es einen DKA \mathcal{K} mit $L = \mathcal{L}(\mathcal{K})$ gibt. ■

Die Übergangsfunktion δ eines DKA kann als partielle Funktion $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^*$ angesehen werden. Es ist daher üblich, auf die Mengenschreibweise zu verzichten und $\delta(q, a, A) = (p, z)$ statt $\delta(q, a, A) = \{(p, z)\}$ zu schreiben. Entsprechend ist die Schreibweise $\delta(q, a, A) = \perp$ anstelle von $\delta(q, a, A) = \emptyset$ gebräuchlich.

Beispiel 3.31 (Deterministisch kontextfreie Sprachen). Die Sprache $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$ ist deterministisch kontextfrei. Intuitiv ist klar, dass wir einen DKA so entwerfen können, der führende a 's des Eingabeworts in seinem Keller ablegt. Sobald das erste b gelesen wird, versucht der DKA seinen Keller zu entleeren, indem für jedes gelesene b ein a aus dem Keller genommen wird. Tatsächlich arbeitet der in Beispiel 3.20 auf Seite 96 angegebene NKA \mathcal{K} für die Sprache L nach diesem Prinzip. Durch Inspektion der Übergangsfunktion überzeugt man sich davon, dass \mathcal{K} tatsächlich deterministisch ist. Die Sprachen

$$L_1 = \{ww^R : w \in \{0, 1\}^*\} \quad \text{und} \quad L_2 = \{w\$w^R : w \in \{0, 1\}^*\}$$

sind kontextfrei. (Wie zuvor steht w^R für das gespiegelte Wort von w). Jedoch ist nur L_2 deterministisch kontextfrei. Wir begnügen uns mit informellen Argumenten. Für die Sprache L_2 kann man einen DKA entwerfen, der zunächst sämtliche gelesenen Zeichen in seinem Keller ablegt. Sobald er das Symbol $\$$ liest, weiß der DKA, dass das Eingabewort von der Form $w\$y$ mit $w \in \{0, 1\}^*$ und $y \in \{0, 1, \$\}^*$ ist. Zu prüfen ist nun, ob der Kellerinhalt mit dem noch zu lesenden Teilwort y übereinstimmt. Hierzu ist offenbar kein Nichtdeterminismus notwendig. Für die Sprache L_1 dagegen kann man zwar einen ähnlich arbeitenden NKA entwerfen (siehe Beispiel 3.21, Seite 97), jedoch muss dieser NKA *nichtdeterministisch* entscheiden, wann er beginnt, seinen Keller zu entleeren. ■

Offenbar ist die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen eine Teilklasse der Sprachen vom Typ 2. Andererseits umfasst die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen die regulären Sprachen. Dies folgt aus der Beobachtung, dass man jeden DFA als DKA auffassen kann, der niemals das Startkellersymbol $\#$ durch andere Symbole ersetzt.

Satz 3.32 (Abschlusseigenschaften von DCFL). *Die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen ist unter der Komplementbildung abgeschlossen; nicht aber unter Vereinigung, Konkatenation, Kleeneabschluss und Durchschnittsbildung.* (teilweise ohne Beweis)

Wir erläutern nur, wie man für den Durchschnitt und die Vereinigung argumentieren kann, wenn man das Abschlussresultat für den Komplementoperator als bekannt voraussetzt. Die Sprachen

$$L_1 = \{a^n b^m c^m : n, m \in \mathbb{N}\}, \quad L_2 = \{a^n b^n c^m : n, m \in \mathbb{N}\}$$

sind deterministisch kontextfrei. (Für L_1 und L_2 kann man einen ähnlichen DKA wie für die Sprache $\{a^n b^n : n \geq 1\}$ entwerfen. Siehe Beispiel 3.20 auf Seite 96.) Andererseits ist die Durchschnittssprache

$$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n : n \in \mathbb{N}\}$$

nicht (deterministisch) kontextfrei (siehe Seite 87). Damit ist die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen nicht unter der Durchschnittsbildung abgeschlossen. Das oben zitierte Ergebnis, dass mit L auch \bar{L} deterministisch kontextfrei ist, zusammen mit der de Morganschen Regel

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}},$$

ergibt, dass die Klasse der deterministischen kontextfreien Sprachen bzgl. der Vereinigung *nicht* abgeschlossen sein kann.

In Lemma 3.29 (Seite 107) haben wir gesehen, dass das Produkt $\mathcal{K} \otimes \mathcal{M}$ eines NKA \mathcal{K} und NFA \mathcal{M} genau die Durchschnittssprache akzeptiert, wenn die Akzeptanz durch Endzustände zugrundegelegt wird. Durch Inspektion der Übergangsfunktion ergibt sich, dass $\mathcal{K} \otimes \mathcal{M}$ ein DKA ist, falls sowohl \mathcal{K} als auch \mathcal{M} deterministisch sind. Somit ist $L_1 \cap L_2$ deterministisch kontextfrei, wenn L_1 deterministisch kontextfrei und L_2 regulär ist. Diese Überlegungen liefern folgendes Lemma.

Lemma 3.33 (Schnitt von DCFL und regulärer Sprache). *Ist L_1 deterministisch kontextfrei und L_2 regulär, so ist $L_1 \cap L_2$ deterministisch kontextfrei.*

In der Definition deterministisch kontextfreier Sprachen (Definition 3.30, Seite 108) haben wir die Akzeptanz durch Endzustände gefordert. Im Gegensatz zu nichtdeterministischen Kellerautomaten sind die beiden Akzeptanzvarianten “Akzeptanz durch Endzustände” und “Akzeptanz bei leerem Keller” für deterministische Kellerautomaten *nicht* gleichwertig. Die Akzeptanz bei leerem Keller ist für DKA schwächer als die Akzeptanz durch Endzustände. Dies liegt vor allem daran, dass ein Kellerautomat stets dann anhält, wenn sein Keller leer ist. Für die Akzeptanz ist es jedoch entscheidend, dass die Eingabe komplett gelesen wurde. Liegt ein DKA \mathcal{K} und ein Eingabewort $w = xy$, wobei $y \neq \varepsilon$, vor, so dass \mathcal{K} für das Präfix x bei leerem Keller anhält, dann führt die Berechnung von \mathcal{K} für das Eingabewort w zu einer Konfiguration, in der der Keller leer ist, aber das Teilwort y noch nicht gelesen ist. \mathcal{K} verwirft also das Wort w . Wir präzisieren diese Beobachtungen.

Definition 3.34 (Präfixeigenschaft). Sei $L \subseteq \Sigma^*$. L hat die *Präfixeigenschaft*, wenn für alle Wörter $w \in L$ gilt: Ist x ein echtes Präfix von w , so ist $x \notin L$. ■

Die Sprache $\{a^n b^n : n \geq 1\}$ hat die Präfixeigenschaft, da für jedes Wort $w = a^n b^n$ alle echten Präfixe die Form $a^n b^i$ oder a^i mit $n > i \geq 1$ haben. Die reguläre Sprache $L = \mathcal{L}(a^* b^*)$ hat die Präfixeigenschaft *nicht*. Z.B. ist $w = aaab \in L$ und $x = aa \in L$.

Wir zeigen nun, dass DKA mit der Akzeptanz bei leerem Keller genau diejenigen deterministisch kontextfreien Sprachen erkennen können, welche die Präfixeigenschaft haben.

Lemma 3.35 (DKA mit Akzeptanz bei leerem Keller). *Sei \mathcal{K} ein DKA.*

(a) $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$ ist deterministisch kontextfrei, d.h. $L = \mathcal{L}(\mathcal{K}')$ für einen DKA \mathcal{K}' .

(b) $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$ hat die Präfixeigenschaft.

Beweis. ad (a). Der im Beweis von Satz 3.22 (Seite 100) konstruierte NKA \mathcal{K}_F mit Akzeptanz durch Endzustände ist deterministisch, falls $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\varepsilon$ deterministisch ist.

ad (b). Sei $w \in \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$, $w = xy$, $y \neq \varepsilon$. Angenommen $x \in \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$. Dann gilt

$$(q_0, x, \#) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

für einen Zustand $q \in Q$. Da \mathcal{K} deterministisch ist, stimmen die ersten Schritte der Berechnung von \mathcal{K} für w genau mit der Berechnung von \mathcal{K} für x überein. Daher gilt:

$$(q_0, w, \#) = (q_0, xy, \#) \vdash^* (q, y, \varepsilon).$$

Wegen $y \neq \varepsilon$ liegt ein verwerfender Lauf für w vor. Widerspruch. \square

Die Sprache $L = \mathcal{L}(0^*1^*)$ ist regulär und somit deterministisch kontextfrei. Es gibt jedoch *keinen* DKA \mathcal{K} mit $L = \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$, da L die Präfixeigenschaft nicht hat.

Im Beweis von Satz 3.23 (Seite 100) haben wir zu gegebenem NKA $\mathcal{K} = \mathcal{K}_F$ mit Akzeptanz durch Endzustände einen äquivalenten NKA \mathcal{K}_ε mit Akzeptanz bei leerem Keller konstruiert. Der konstruierte NKA \mathcal{K}_ε ist jedoch auch dann kein DKA, wenn \mathcal{K}_F deterministisch ist. Dies untermauert das Resultat, dass für DKA die Akzeptanz bei leerem Keller schwächer als die Akzeptanz durch Endzustände ist. Hat jedoch die durch \mathcal{K}_F akzeptierte Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{K}_F)$ die Präfixeigenschaft, dann können wir die angegebene Definition des Kellerautomaten \mathcal{K}_ε so modifizieren, dass ein DKA entsteht, für den die bei leerem Keller akzeptierte Sprache mit $\mathcal{L}(\mathcal{K}_F)$ übereinstimmt. Die durchzuführende Veränderung besteht lediglich darin, dass – sobald \mathcal{K}_F einen Endzustand erreicht – der simulierende DKA \mathcal{K}_ε seinen Keller entleert.

Lemma 3.36. *Sei L eine deterministische kontextfreie Sprache mit der Präfixeigenschaft. Dann gibt es einen DKA \mathcal{K}_ε mit $L = \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}_\varepsilon)$.*

Beweis. Sei $\mathcal{K}_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$ ein DKA für L mit Akzeptanz durch Endzustände, also $\mathcal{L}(\mathcal{K}_F) = L$. Da L die Präfixeigenschaft hat, kann man o.E. annehmen, dass $\delta(p, \varepsilon, A) = \delta(p, a, A) = \perp$ für alle Endzustände $p \in F$ und alle Zeichen $a \in \Sigma$, $A \in \Gamma$. Wir wenden nun die im Beweis von Satz 3.23 (Seite 100) angegebene Konstruktion eines äquivalenten Kellerautomaten \mathcal{K}_ε mit Akzeptanz bei leerem Keller an. Da \mathcal{K} anhält, sobald ein Zustand $p \in F$ betreten wird, ist \mathcal{K}_ε deterministisch. \square

Lemma 3.35 (Seite 110) und Lemma 3.36 (Seite 110) implizieren folgenden Satz.

Satz 3.37 (DKA-Sprachen für Akzeptanz bei leerem Keller). *Sei L eine Sprache. Dann gilt: L ist genau dann deterministisch kontextfrei mit der Präfixeigenschaft, wenn $L = \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}_\varepsilon)$ für einen DKA \mathcal{K}_ε .*

Abschliessend erwähnen wir, dass es einen einfachen Trick gibt, um eine gegebene deterministisch-kontextfreie Sprache L in eine ‘‘ähnliche’’ Sprache zu überführen, die durch einen DKA mit Akzeptanz bei leerem Keller akzeptiert wird. Hierzu verwenden wir eine Endemarkierung $\$,$ die an alle Worter aus L angehängt wird und somit die Präfixeigenschaft erzwingt.

Für $L \subseteq \Sigma^*$ sei $L\$ = \{w\$: w \in L\}$, wobei $\$$ ein Zeichen ist, das nicht in Σ liegt. Tatsächlich gilt nun:

Lemma 3.38 (DCFL mit Endemarkierung). *Ist L deterministisch kontextfrei, so gibt es einen DKA \mathcal{K}_ϵ mit $\mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{K}_\epsilon) = L\$$.*

Beweis. Sei $\mathcal{K} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$ ein DKA mit $L = \mathcal{L}(\mathcal{K})$. Wir konstruieren nun einen DKA \mathcal{K}_ϵ mit Akzeptanz bei leerem Keller, der \mathcal{K} simuliert und den Keller leert, sobald \mathcal{K} einen Endzustand erreicht und $\$$ gelesen wird. Die formale Definition von \mathcal{K}_ϵ ist wie folgt:

$$\mathcal{K}_\epsilon = (Q \cup \{q'_0, q_F\}, \Sigma \cup \{\$\}, \Gamma', \delta', q'_0, \#)$$

Das Kellularphabet ist $\Gamma' = \Gamma \cup \{\$\}$, wobei wir $\$ \notin \Gamma$ annehmen. Das zusätzliche Symbol $\$$ (als Kellersymbol) dient zur Markierung des Kellerbodens während der Simulation. Die Übergangsfunktion δ' ist wie folgt:

$$\begin{aligned} \delta'(q'_0, \epsilon, \#) &= (q_0, \#\$) & \delta'(q, a, A) &= \delta(q, a, A) \\ \delta'(p, \$, B) &= (q_F, B) \quad \text{für } p \in F & \delta'(q, \epsilon, A) &= \delta(q, \epsilon, A) \\ \delta'(q_F, \epsilon, B) &= (q_F, \epsilon) \end{aligned}$$

für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$, $A \in \Gamma$ und $B \in \Gamma \cup \{\$\}$. Zu zeigen ist nun, dass $\mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{K}_\epsilon) = L\$$.

‘‘ \supseteq ’’: Sei $x \in L\$$, also $x = w\$$ für ein Wort $w \in L$. Wegen $L = \mathcal{L}(\mathcal{K})$ gilt:

$$(q_0, w, \#) \vdash_{\mathcal{K}}^* (p, \epsilon, x)$$

für einen Endzustand p von \mathcal{K} und ein Wort $x \in \Gamma^*$. Dann gilt:

$$(q'_0, w\$, \#) \vdash_{\mathcal{K}_\epsilon} (q_0, w\$, \#\$) \vdash_{\mathcal{K}_\epsilon}^* (p, \$, x\$) \vdash_{\mathcal{K}_\epsilon} (q_F, \epsilon, x\$) \vdash_{\mathcal{K}_\epsilon}^* (q_F, \epsilon, \epsilon)$$

Also $x = w\$ \in \mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{K}_\epsilon)$.

‘‘ \subseteq ’’: Sei nun $x \in \mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{K}_\epsilon)$. Da q'_0 eine ϵ -Transition hat, gilt dann:

$$(q'_0, x, \#) \vdash_{\mathcal{K}_\epsilon} (q_0, x, \#\$) \vdash_{\mathcal{K}_\epsilon}^* (q, \epsilon, \epsilon)$$

für einen Zustand q von \mathcal{K}_ϵ . Die einzige Möglichkeit das Kellersymbol $\$$ aus dem Keller zu entfernen sind die Transitionen $\delta(p, \$, \epsilon) = (q_F, \epsilon)$ für die Endzustände p von \mathcal{K} . Weiter ist q_F absorbierend, d.h., ein Zustand, von dem kein anderer erreichbar ist, und q_F hat eine ϵ -Transition. Ferner wird $\$$ niemals auf den Keller gelegt, abgesehen von der ϵ -Transition vom Anfangszustand q'_0 . Daher muss $q = q_F$ gelten und es einen Zustand $p \in F$ und Worter $w \in \Sigma^*$ und $y \in \Gamma^*$ geben, so dass $x = w\$$ und

$$(q_0, w\$, \#\$) \vdash_{\mathcal{K}_\epsilon}^* (p, \$, y\$) \vdash_{\mathcal{K}_\epsilon} (q_F, \epsilon, y\$) \vdash_{\mathcal{K}_\epsilon}^* (q_F, \epsilon, \epsilon)$$

Da δ und δ' auf $Q \times \Sigma \times \Gamma$ übereinstimmen, folgt $(q_0, x, \#) \vdash_{\mathcal{K}}^* (p, \epsilon, y\$)$ und somit $x \in \mathcal{L}(\mathcal{K}) = L$. Also ist $w = x\$ \in L\$$. \square

Zusammenfassung der Konzepte aus Kapitel 3

Eine zentrale Rolle bei der Untersuchung von kontextfreien Sprachen spielen Normalformen kontextfreier Grammatiken, wie Chomsky oder Greibach Normalform. Die Chomsky Normalform haben wir als Ausgangspunkt für einen Algorithmus für das Wort- und Endlichkeitsproblem genutzt. Das Leerheitsproblem ist für kontextfreie Grammatiken ebenfalls effizient lösbar. Die meisten anderen algorithmischen Fragestellungen für kontextfreie Grammatiken (z.B. das Äquivalenz- oder Inklusionsproblem oder die Frage, ob die erzeugte Sprache einer kontextfreien Grammatik regulär ist) sind jedoch nicht algorithmisch lösbar. Weiter diente uns die Chomsky Normalform für den Nachweis des Pumping Lemmas, das eine notwendige Bedingung für kontextfreie Sprachen liefert und somit hilfreich sein kann zu zeigen, dass eine gegebene Sprache nicht kontextfrei ist.

Das zu den kontextfreien Sprachen gehörende Automatenmodell ist der Kellerautomat. Im Wesentlichen ist dies eine Erweiterung vom ϵ -NFA um ein im LIFO-Prinzip organisiertes Speichermedium. Im Gegensatz zu endlichen Automaten sind die nichtdeterministische und deterministische Version von Kellerautomaten nicht gleichmächtig. Die beiden Akzeptanzkriterien "Akzeptanz über Endzustände" und "Akzeptanz bei leerem Keller" sind für die nichtdeterministische Version äquivalent. Für deterministische Kellerautomaten ist Akzeptanz über Endzustände jedoch mächtiger. Die Klasse der Sprachen, die durch einen DKA mit Akzeptanz bei leerem Keller akzeptiert werden, ist genau die Klasse der DKA-Sprachen mit der Präfixeigenschaft.

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist unter Vereinigung, Kleeneabschluss und Konkatenation abgeschlossen, jedoch nicht unter Durchschnitt und Komplement. Die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen ist nur unter Komplement abgeschlossen, aber unter keinem der anderen vier gängigen Verknüpfungsoperatoren (Vereinigung, Schnitt, Konkatenation, Kleeneabschluss).

Im Kontext des Übersetzerbaus spielen spezielle Grammatiktypen für deterministisch kontextfreie Sprachen eine zentrale Rolle. Der Parser kann dann das Wortproblem durch Algorithmen lösen, die ähnlich wie ein DKA arbeiten und deutlich effizienter sind als der CYK-Algorithmus oder andere Algorithmen für die vollständige Klasse kontextfreier Sprachen, dargestellt durch (Normalformen von) Typ 2 Grammatiken.