

Für alle Sprachen L gilt:

L ist kontextfrei

gdw $L = \mathcal{L}(G)$ für eine CFG G

gdw $L = \mathcal{L}(\mathcal{K}_F)$ für einen NKA \mathcal{K}_F

gdw $L = \mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{K}_\epsilon)$ für einen NKA \mathcal{K}_ϵ

gdw $L = \mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{K}_\epsilon)$ für einen NKA \mathcal{K}_ϵ
mit nur einem Zustand

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter

- Vereinigung
 - Konkatenation
 - Kleeneabschluss
- } Beweis mit Hilfe entsprechender Operatoren für kontextfreie Grammatiken

aber nicht unter Durchschnitt und Komplement.

z.B. $L_1 = \{a^n b^n c^m : n, m \geq 0\}$

$$L_2 = \{a^n b^m c^m : n, m \geq 0\}$$

kontextfrei, aber

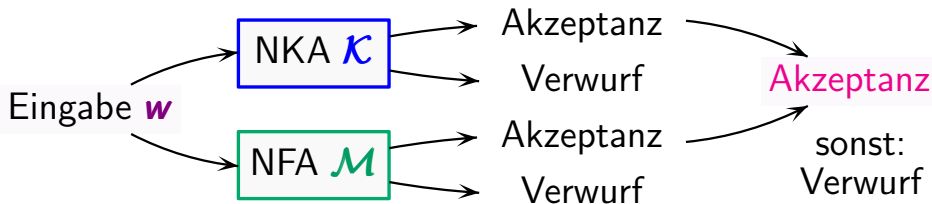
$$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\} \text{ nicht kontextfrei.}$$

$$\left. \begin{array}{l} L_1 \text{ kontextfrei} \\ L_2 \text{ regulär} \end{array} \right\} \implies L_1 \cap L_2 \text{ kontextfrei}$$

Beweis: Sei \mathcal{K} ein NKA mit $L_1 = \mathcal{L}(\mathcal{K})$ und \mathcal{M} ein NFA mit $L_2 = \mathcal{L}(\mathcal{M})$.

Konstruiere einen NKA \mathcal{K}' mit $\mathcal{L}(\mathcal{K}') = L_1 \cap L_2$.

Idee: definiere $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \otimes \mathcal{M}$ als Produkt-NKA



Sei $\mathcal{K} = (Q_1, \Sigma, \Gamma, \delta_1, q_{0,1}, \#, F_1)$ ein NKA

$\mathcal{M} = (Q_2, \Sigma, \delta_2, \{q_{0,2}\}, F_2)$ ein NFA

Produkt-NKA $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \otimes \mathcal{M}$:

- Zustandsraum $Q = Q_1 \times Q_2$
- Eingabealphabet Σ
- Kellularphabet Γ
- Kellerstartsymbol $\#$
- Anfangszustand $\langle q_{0,1}, q_{0,2} \rangle$
- Endzustände $\langle p_1, p_2 \rangle$ mit $p_1 \in F_1$ und $p_2 \in F_2$

Ein deterministischer Kellerautomat ist ein NKA

$$\mathcal{K} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F),$$

so dass für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$, $B \in \Gamma$ gilt:

$$|\delta(q, a, B)| + |\delta(q, \varepsilon, B)| \leq 1$$

d.h., es gilt für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$, $B \in \Gamma$:

1. $|\delta(q, a, B)| \leq 1$

2. $|\delta(q, \varepsilon, B)| \leq 1$

3. falls $\delta(q, \varepsilon, B) \neq \emptyset$, so gilt:

$$\delta(q, a, B) = \emptyset \text{ für alle } a \in \Sigma$$

DKA \mathcal{K} mit $\mathcal{L}(\mathcal{K}) = \{ a^n b^n : n \geq 1 \}$

Zustandsraum $Q = \{ q_a, q_b, p \}$ Anfangszustand q_a

Eingabealphabet $\Sigma = \{ a, b \}$ Endzustand p

Kellularphabet $\Gamma = \{ a, \# \}$

$$\delta(q_a, a, \#) = \langle q_a, a\# \rangle \quad \delta(q_b, b, a) = \langle q_b, \varepsilon \rangle$$

$$\delta(q_a, a, a) = \langle q_a, aa \rangle \quad \delta(q_b, \varepsilon, \#) = \langle p, \# \rangle$$

$$\delta(q_a, b, a) = \langle q_b, \varepsilon \rangle \quad \delta(\cdot) = \perp \text{ sonst}$$

Lauf für $a^n b^n$, wobei $n \geq 1$:

$$\langle q_a, a^n b^n, \# \rangle \vdash^* \langle q_a, b^n, a^n \# \rangle \vdash \langle q_b, b^{n-1}, a^{n-1} \# \rangle$$

$$\vdash^* \langle q_b, \varepsilon, \# \rangle \vdash \langle p, \varepsilon, \# \rangle \text{ akzeptierend}$$

Eine Sprache L heißt deterministisch-kontextfrei, falls es einen DKA \mathcal{K} gibt, so dass $L = \mathcal{L}(\mathcal{K})$.

Akzeptanz über Endzustände

Beispiele:

1. $\{a^n b^n : n \geq 1\}$ deterministisch-kontextfrei
2. $\{a^n b^n c^m : n, m \geq 1\}$ deterministisch-kontextfrei
3. $\{w\$w^R : w \in \{a, b\}^*\}$ deterministisch-kontextfrei

aber: $\{ww^R : w \in \{a, b\}^*\}$ ist nicht
deterministisch-kontextfrei (ohne Beweis)

Jede reguläre Sprache ist deterministisch-kontextfrei.

Beweis. Sei L eine reguläre Sprache und

$\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA mit $L = \mathcal{L}(\mathcal{M})$.

\mathcal{M} kann als DKA aufgefasst werden. Genauer:

$\mathcal{K} = (Q, \Sigma, \{\#\}, \delta', q_0, \#, F)$, wobei

$$\delta'(q, a, \#) = \begin{cases} \langle p, \# \rangle & : \text{ falls } \delta(q, a) = p \in Q \\ \perp & : \text{ falls } \delta(q, a) = \perp \end{cases}$$

ist ein DKA mit $\mathcal{L}(\mathcal{K}) = \mathcal{L}(\mathcal{M}) = L$.

Die Klasse der deterministisch-kontextfreien Sprachen ist unter **Komplement** abgeschlossen. (*ohne Beweis*)

aber nicht unter

- Vereinigung \leftarrow da $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$
 - Durchschnitt \leftarrow siehe unten
 - Konkatination
 - Kleeneabschluss
- } ohne Beweis

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \{a^n b^m c^m : n, m \geq 0\} \\ L_2 &= \{a^n b^n c^m : n, m \geq 0\} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{deterministisch-} \\ \text{kontextfrei} \end{array}$$

aber $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ nicht kontextfrei

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. L hat die Präfixeigenschaft, falls für alle $x, w \in \Sigma^*$ gilt:

Ist $x \in L$ und x ein echtes Präfix von w ,
d.h., $w = xy$ für ein $y \in \Sigma^+$, so gilt $w \notin L$.

Beispiele:

1. $\{0^n 1^n : n \geq 1\}$ hat die Präfixeigenschaft
2. $\{0^n 1^k : n, k \geq 0\} = \mathcal{L}(0^* 1^*)$ hat die Präfixeigenschaft nicht, da z.B.

$$00 \in \mathcal{L}(0^* 1^*) \quad \text{und} \quad 001 \in \mathcal{L}(0^* 1^*)$$

Für jeden DKA $\mathcal{K} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ ist

$$\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}) = \left\{ x \in \Sigma^* : \text{es gibt ein } q \in Q \text{ mit} \right. \\ \left. \langle q_0, x, \# \rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \varepsilon \rangle \right\}$$

eine Sprache mit der Präfixeigenschaft.

Beweis: Sei $x \in \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$ und $y \in \Sigma^+$. Dann gilt:

$$\langle q_0, x, \# \rangle \vdash^* \underbrace{\langle q, \varepsilon, \varepsilon \rangle}_{\mathcal{K} \text{ akzeptiert}} \quad \text{für ein } q \in Q$$

$$\langle q_0, xy, \# \rangle \vdash^* \underbrace{\langle q, y, \varepsilon \rangle}_{\mathcal{K} \text{ verwirft}}$$

← $xy \notin \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1) L hat die Präfixeigenschaft, d.h., für alle $x, w \in \Sigma^*$ gilt:
Ist $x \in L$ und x ein echtes Präfix von w ,
so gilt $w \notin L$.
- (2) Für alle $x, v \in \Sigma^*$ gilt:
Ist $x \in L$ und v ein echtes Präfix von x ,
so gilt $v \notin L$.
- (3) Für je zwei Wörter $x, y \in L$ mit $x \neq y$ gilt:
 x ist kein Präfix von y

Für jeden DKA \mathcal{K} gilt:

- (1) $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$ hat die Präfixeigenschaft
- (2) $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$ ist deterministisch-kontextfrei, d.h.,
 $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}) = \mathcal{L}(\mathcal{K}')$ für einen DKA \mathcal{K}' .

Beweis von (2): die Transformation

NKA mit Akzeptanz bei leerem Keller	\rightsquigarrow	NKA mit Akzeptanz über Endzustände
---	--------------------	--

erhält **Determinismus**

Für jede deterministisch-kontextfreie Sprache L mit der Präfixeigenschaft gibt es einen DKA \mathcal{K} , so dass $L = \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$.

Sei $\mathcal{K}_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$ ein DKA mit $L = \mathcal{L}(\mathcal{K}_F)$.

↑
Akzeptanz über Endzustände

Da $L = \mathcal{L}(\mathcal{K}_F)$ die Präfixeigenschaft hat, kann o.E. angenommen werden, dass $\delta(p, a, B) = \delta(p, \varepsilon, B) = \perp$ für alle $p \in F$, $a \in \Sigma$, $B \in \Gamma$.

Konstruiere nun einen DKA $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\varepsilon$ mit $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}_\varepsilon) = \mathcal{L}(\mathcal{K}_F)$

Sei $\mathcal{K}_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$ ein DKA, so dass
 $\delta(p, a, B) = \delta(p, \varepsilon, B) = \perp$ für alle $p \in F$, $a \in \Sigma$, $B \in \Gamma$.

Definiere DKA \mathcal{K}_ε mit $\mathcal{L}(\mathcal{K}_F) = \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}_\varepsilon)$ wie folgt:

$$\mathcal{K}_\varepsilon = (Q \cup \{q'_0, q_F\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \delta', q'_0, \#)$$

$$\delta'(q'_0, \varepsilon, \#) = \langle q_0, \#\$\rangle$$

$$\delta'(q, a, A) = \delta(q, a, A) \quad \text{für } q \in Q \setminus F,$$

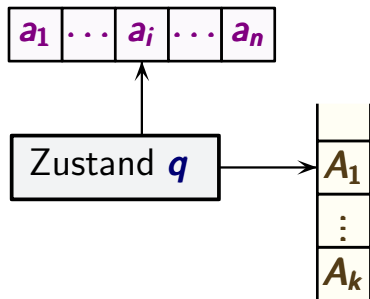
$$\delta'(q, \varepsilon, A) = \delta(q, \varepsilon, A) \quad a \in \Sigma, A \in \Gamma$$

$$\delta'(p, \varepsilon, A) = \langle q_F, \varepsilon \rangle \quad \text{für } p \in F$$

$$\delta'(q_F, \varepsilon, A) = \delta'(q_F, \varepsilon, \$) = \langle q_F, \varepsilon \rangle$$

$$\delta'(\cdot) = \perp \text{ in allen anderen Fällen}$$

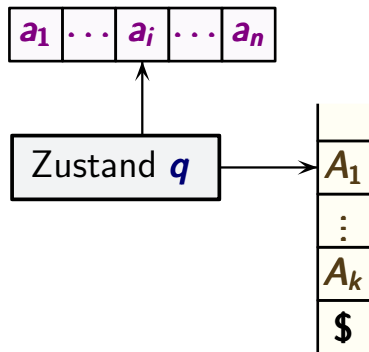
DKA \mathcal{K}_F



aktuelle
Konfiguration

$\langle q, a_j \dots a_n, A_1 \dots A_k \rangle$

DKA \mathcal{K}_ϵ



simulierende
Konfiguration

$\langle q, a_j \dots a_n, A_1 \dots A_k \$ \rangle$

kontextfreie Sprachen

$\mathcal{L}(\mathcal{K})$ oder $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$ für einen NKA \mathcal{K}

deterministisch-kontextfreie Sprachen

$\mathcal{L}(\mathcal{K})$ für einen DKA \mathcal{K}

reguläre Sprachen

$\mathcal{L}(\mathcal{M})$ für einen
NFA/DFA \mathcal{M}

deterministisch-
kontextfreie
Sprachen mit der
Präfixeigenschaft

$\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$ für einen
DKA \mathcal{K}

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine deterministisch kontextfreie Sprache.
Dann ist die Sprache

$$L\$ = \{ w\$: w \in L \}$$

deterministisch kontextfrei mit der Präfixeigenschaft.

D.h., es gibt einen DKA \mathcal{K}_ϵ mit $\mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{K}_\epsilon) = L\$$.

Idee für die Konstruktion von \mathcal{K}_ϵ :

\mathcal{K}_ϵ simuliert einen DKA \mathcal{K} für L und leert den Keller, sobald $\$$ gelesen wird und \mathcal{K} einen Endzustand erreicht hat

Sei $\mathcal{K} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$ ein DKA mit $\mathcal{L}(\mathcal{K}) = L$.

DKA mit Akzeptanz bei leerem Keller für $L\$$:

$$\mathcal{K}_\epsilon = (Q \cup \{q'_0, q_F\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \delta', q'_0, \#)$$

$$\delta'(q'_0, \epsilon, \#) = \langle q_0, \#\$\rangle$$

$$\delta'(q, a, A) = \delta(q, a, A) \quad \delta'(p, \$, A) = \langle q_F, A \rangle$$

$$\delta'(q, \epsilon, A) = \delta(q, \epsilon, A) \quad \delta'(p, \$, \$) = \langle q_F, \$ \rangle$$

$$\delta'(q_F, \epsilon, A) = \delta'(q_F, \epsilon, \$) = \langle q_F, \epsilon \rangle$$

für $q \in Q$, $a \in \Sigma$, $A \in \Gamma$ und $p \in F$

Sprache $L\$$ für $L = \mathcal{L}(\mathcal{K}_F)$

