Hornklausel: Klausel mit höchstens einem positiven Literal

drei Arten von Hornklauseln:

“Regel”

- mindestens ein negatives Literal
  und genau ein positives Literal

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_m \rightarrow y \quad \equiv \quad \neg x_1 \vee \ldots \vee \neg x_m \vee y$$

- kein negatives Literal und genau ein positives Literal
  (positive Einheitsklausel)

$$\mathit{true} \rightarrow x \quad \equiv \quad x \qquad \longleftarrow \text{“Fakt”}$$

“Zielklausel”

- kein positives Literal

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_m \rightarrow \mathit{false} \quad \equiv \quad \neg x_1 \vee \ldots \vee \neg x_m$$

Hornformel: KNF-Formel bestehend aus Hornklauseln

"höchstens ein positives Literal pro Klausel"

Beispiele:

$$(x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge y \wedge (\neg z \vee \neg w)$$

$$\equiv (y \wedge z \rightarrow x) \wedge (\mathit{true} \rightarrow y) \wedge (z \wedge w \rightarrow \mathit{false})$$

KNF-Formeln bestehend aus Fakten, z.B.

$$x \wedge y \equiv (\mathit{true} \rightarrow x) \wedge (\mathit{true} \rightarrow y)$$

KNF-Formel bestehend aus der leeren (Ziel-)Klausel

$$\sqcup = \mathit{true} \rightarrow \mathit{false} \equiv \mathit{false}$$

Hornformeln in der Logikprogrammierung

Logikprogramm P
Menge von Fakten und Regeln

$\downarrow$

Hornformel α_P ohne Zielklauseln

Benutzeranfrage: "folgt Aussage β logisch aus P ?"

Rückführung auf Unerfüllbarkeitstest:

$$\alpha_P \Vdash \beta \quad \text{gdw} \quad \alpha_P \wedge \neg\beta \quad \text{unerfüllbar}$$

$\uparrow$

falls $\beta = x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$: Zielklausel $\neg x_1 \vee \ldots \vee \neg x_m$

Beispiel: Chemielabor

vorhandene Stoffe: MgO, $\mathsf{H_2}$, $\mathsf{O_2}$, C

durchführbare Reaktionen:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{MgO} + \mathsf{H_2} & \longrightarrow & \mathsf{Mg} + \mathsf{H_2O} \\
\mathsf{C} + \mathsf{O_2} & \longrightarrow & \mathsf{CO_2} \\
\mathsf{H_2O} + \mathsf{CO_2} & \longrightarrow & \mathsf{H_2CO_3}
\end{array}
$$

Frage: ist $\mathsf{H_2CO_3}$ in dem Labor herstellbar **?**

stelle die Ausgangssituation durch eine Hornformel α dar und prüfe ob $\alpha \Vdash \mathsf{H_2CO_3}$

$\uparrow$

Unerfüllbarkeitstest für $\alpha \wedge \neg \mathsf{H_2CO_3}$

vorhandene Stoffe: $\mathsf{MgO}, \mathsf{H_2}, \mathsf{O_2}, \mathsf{C}$ $\longleftarrow$ Fakten

durchführbare Reaktionen:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{MgO} + \mathsf{H_2} & \longrightarrow & \mathsf{Mg} + \mathsf{H_2O} \\ \mathsf{C} + \mathsf{O_2} & \longrightarrow & \mathsf{CO_2} \\ \mathsf{H_2O} + \mathsf{CO_2} & \longrightarrow & \mathsf{H_2CO_3} \end{array} \quad \longleftarrow \text{Regeln}$$

Hornformel α für die Ausgangssituation

$$\begin{aligned} &\mathsf{MgO} \wedge \mathsf{H_2} \wedge \mathsf{O_2} \wedge \mathsf{C} \wedge \\ &(\mathsf{MgO} \wedge \mathsf{H_2} \rightarrow \mathsf{Mg}) \wedge (\mathsf{MgO} \wedge \mathsf{H_2} \rightarrow \mathsf{H_2O}) \wedge \\ &(\mathsf{C} \wedge \mathsf{O_2} \rightarrow \mathsf{CO_2}) \wedge (\mathsf{H_2O} \wedge \mathsf{CO_2} \rightarrow \mathsf{H_2CO_3}) \end{aligned}$$

Prüfe nun, ob $\alpha \wedge \neg \mathsf{H_2CO_3}$ unerfüllbar ist.

Markierungsalgorithmus für HORN-SAT

Markiere alle Aussagensymbole x, die als Fakten in α vorkommen.

REPEAT

IF es gibt eine Zielklausel $x_1 \wedge \ldots \wedge x_m \rightarrow \mathit{false}$ so dass $x_1, \ldots, x_m$ markiert sind
THEN return "nein" FI

IF es gibt eine Regel $x_1 \wedge \ldots \wedge x_m \rightarrow y$, so dass $x_1, \ldots, x_m$ markiert sind und y nicht markiert ist
THEN markiere y FI

UNTIL keine Veränderungen in der letzten Iteration

Gib "ja" aus.

Behauptung:

1. Wenn der Markierungsalgorithmus mit der Antwort "nein" anhält, dann ist α unerfüllbar.

2. Wenn der Markierungsalgorithmus mit der Antwort "ja" anhält, dann ist α erfüllbar.

   In diesem Fall ist die Belegung $\mathfrak{I}$ mit

   $$x^{\mathfrak{I}} = \begin{cases} \mathbf{1} & : \; x \text{ ist nach Terminierung markiert} \\ \mathbf{0} & : \; \text{sonst} \end{cases}$$

   das kleinste Modell für α, d.h., $\alpha^{\mathfrak{I}} = \mathbf{1}$ und für jedes Modell $\mathfrak{J}$ und alle Atome x gilt: $x^{\mathfrak{I}} \leqslant x^{\mathfrak{J}}$

Beispiel: kleinstes Modell

$$\alpha = s \wedge t \wedge u \wedge (s \wedge t \rightarrow w) \wedge (s \wedge t \rightarrow x) \wedge (v \wedge u \rightarrow y) \wedge (x \wedge y \rightarrow z) \wedge (z \rightarrow \mathit{false})$$

kleinstes Modell für α:

$$s^{\mathcal{I}} = t^{\mathcal{I}} = u^{\mathcal{I}} = w^{\mathcal{I}} = x^{\mathcal{I}} = 1, \qquad v^{\mathcal{I}} = y^{\mathcal{I}} = z^{\mathcal{I}} = 0$$

vorhandene Grundstoffe: MgO, H_2, O_2, aber nicht C

$$\begin{array}{lll} s = MgO & w = Mg & \\ t = H_2 & x = H_2O & \Big\} \text{ durch Reaktionen herstellbare Stoffe} \\ u = O_2 & y = CO_2 & \\ v = C & z = H_2CO_3 & \Big\} \text{ nicht herstellbar} \end{array}$$

Wir haben gesehen:

> Jede erfüllbare Hornformel besitzt ein kleinstes Modell.

Gibt es zu jeder erfüllbaren aussagenlogischen Formel α ein kleinstes Modell **?**

Antwort: nein, z.B. hat $\alpha = x \vee y$ kein kleinstes Modell

$[x{=}0, y{=}0]$ ist kein Modell für α

$$\left.\begin{array}{l}[x{=}1, y{=}0] \\ [x{=}0, y{=}1]\end{array}\right\} \text{unvergleichbare Modelle für } \alpha$$

$[x{=}1, y{=}1]$ Modell für α, aber nicht minimal

Keine negativen Schlüsse aus definiten Formeln

Ist α eine definite Hornformel und x ein Atom, so gilt:

$$\alpha \not\Vdash \neg x$$

Beweis: Angenommen $\alpha \Vdash \neg x$

Dann ist $\alpha \wedge \neg\neg x$ unerfüllbar.

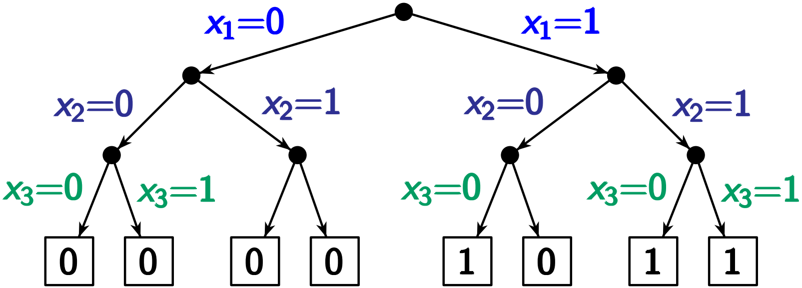
Also ist $\alpha \wedge x$ unerfüllbar.

definite Hornformel

Andererseits sind definite Hornformeln stets erfüllbar.
Widerspruch !!!

analysiere den Entscheidungsbaum der Eingabeformel α

z.B. $\alpha = x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_3)$



Belegungen $\widehat{=}$ Pfade von der Wurzel zu den Blättern

Beschriftungen der Blätter $\widehat{=}$ Wahrheitswerte von α

Rekursiver Algorithmus $Sat(\alpha, i)$

verwendet globale Boolesche Variablen $b_1, b_2, \ldots, b_n$

```
IF i = n THEN
   berechne c := α^I für I = [x1=b1, x2=b2, ..., xn=bn];
   return c
ELSE
   b_{i+1} := 0;
   IF  Sat(α, i+1)  THEN  return 1  FI
   b_{i+1} := 1;
   IF  Sat(α, i+1)  THEN  return 1  ELSE  return 0  FI
FI
```

$\mathbf{1} \;\widehat{=}\;$ "true" $\qquad$ $\mathbf{0} \;\widehat{=}\;$ "false

KNF-SAT-Beweiser

Eingabe: KNF-Formel α (konjunktive Normalform)

Frage: ist α erfüllbar **?**

ist zugleich als SAT-Beweiser einsetzbar

aussagenlogische Formel β

$\downarrow$

KNF-Formel α mit $\alpha \equiv \beta$

$\downarrow$

KNF-SAT-Beweiser

Einfache Sonderfälle von KNF-SAT

Falls jede Klausel von α wenigstens ein positives Literal enthält, dann ist α erfüllbar.

erfüllende Belegung für α:

$$x^{\mathrm{I}} = \mathbf{1} \quad \text{für alle Aussagensymbole } x$$

Falls jede Klausel von α wenigstens ein negatives Literal enthält, dann ist α erfüllbar.

erfüllende Belegung für α:

$$x^{\mathrm{I}} = \mathbf{0} \quad \text{für alle Aussagensymbole } x$$

Einfache Sonderfälle von KNF-SAT

hinreichende syntaktische Kriterien für die Erfüllbarkeit einer KNF-Formel $\boldsymbol{\alpha}$:

- $\boldsymbol{\alpha}$ besteht aus **0** Klauseln
- jede Klausel von $\boldsymbol{\alpha}$ enthält wenigstens ein positives Literal
- jede Klausel von $\boldsymbol{\alpha}$ enthält wenigstens ein negatives Literal
- $\boldsymbol{\alpha}$ enthält nicht die leere Klausel und jedes Atom kommt entweder nur positiv oder nur negativ vor