Resolutionsalgorithmus

gegeben: KNF-Formel α

Aufgabe: prüfe mittels Resolution, ob α erfüllbar ist

$\alpha_0 := \alpha$; $\quad i := 0$;

REPEAT

$\quad \alpha_{i+1} := \alpha_i \cup Res(\alpha_i)$; $\quad i := i + 1$

UNTIL $\sqcup \in \alpha_i$ oder $\alpha_{i-1} = \alpha_i$

IF $\sqcup \in \alpha_i$ THEN gib "nein, α ist unerfüllbar" aus

ELSE gib "ja, α ist erfüllbar" aus

FI

Resolutionsalgorithmus für 2KNF

2KNF-Formeln: KNF-Formeln mit höchstens zwei Literalen pro Klausel

> Alle Resolventen von 2KNF-Formeln sind Klauseln mit höchstens zwei Literalen.

Sei α eine 2KNF-Formel mit den Atomen $x_1, \ldots, x_n$.

Was ist die maximale Anzahl an Resolventen von α ?

Antwort: $\mathcal{O}(n^2)$, genauer $2n(2n-1) + 2n + 1$

Anzahl der Iterationen des Resolutionsalgorithmus ist für 2KNF-Formeln durch $\mathcal{O}(n^2)$ beschränkt

Für jede KNF-Formel α gilt:

$$\alpha \text{ unerfüllbar} \quad \text{gdw} \quad \sqcup \in \mathit{Res}^*(\alpha)$$

Folgerung: Resolution ist korrekt und vollständig als Widerlegegungskalkül

aber: Resolution als Kalkül für logische Folgerbarkeit ist zwar korrekt, aber unvollständig

Beispiel: $\alpha = y \wedge \neg y \wedge x$ ist unerfüllbar.

Also gilt $\alpha \Vdash \neg x$, aber $\{\neg x\} \notin \mathit{Res}^*(\alpha) = \alpha \cup \{\sqcup\}$

Resolutionsalgorithmus für Folgerbarkeit

gegeben: KNF-Formel α, Klausel λ

Aufgabe: prüfe mittels Resolution, ob $\alpha \Vdash \lambda$

Sei $\lambda = L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_k$, wobei $L_1, \ldots, L_k$ Literale.

$$\begin{array}{lll} \alpha \Vdash \lambda & \text{gdw} & \alpha \wedge \neg\lambda \ \text{ ist unerfüllbar} \\ & \text{gdw} & \alpha \wedge \overline{L_1} \wedge \overline{L_2} \wedge \ldots \wedge \overline{L_k} \ \text{ unerfüllbar} \\ & \text{gdw} & \sqcup \in Res^*\big(\alpha \wedge \overline{L_1} \wedge \ldots \wedge \overline{L_k}\big) \end{array}$$

$$\overline{L} = \begin{cases} \neg x & : \text{ falls } L = x \\ x & : \text{ falls } L = \neg x \end{cases}$$

komplementäres Literal

Für jede nicht-tautologische KNF-Formel α und jede nicht-tautologische Klausel λ gilt:

$$\alpha \Vdash \lambda \quad \text{gdw} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{es gibt eine Klausel } \lambda' \in \mathit{Res}^*(\alpha) \\ \text{mit } \lambda' \subseteq \lambda \end{array} \right.$$

(ohne Beweis)

Die Aussage des Resolutionssatzes folgt mit $\lambda = \sqcup$:

$$\alpha \text{ ist unerfüllbar} \quad \text{gdw} \quad \alpha \Vdash \mathit{false} = \sqcup$$

$$\text{gdw} \quad \sqcup \in \mathit{Res}^*(\alpha)$$

$\sqcup$ = leere Klausel = leere Literalmenge

Resolutionsalgorithmus für Folgerbarkeit

gegeben: KNF-Formel α, Klausel λ

Aufgabe: prüfe mittels Resolution, ob $\alpha \Vdash \lambda$

```
α₀ := α;    i := 0;
REPEAT
      α_{i+1} := α_i ∪ Res(α_i);    i := i + 1
UNTIL  es gibt eine Klausel λ' ∈ α_i mit λ' ⊆ λ
       oder  α_{i−1} = α_i
IF  es gibt eine Klausel λ' ∈ α_i mit λ' ⊆ λ
      THEN  gib "ja" aus
      ELSE  gib "nein" aus
FI
```

Beispiel: Resolutionsalgorithmus

$$\alpha \;=\; (x \lor y \lor \neg z) \land (\neg x \lor y \lor w) \land (z \lor w) \land v$$

Gilt $\alpha \Vdash \lambda$, wobei $\lambda = y \lor w \lor \neg v$?

$$\begin{tikzcd}
\{x, y, \neg z\} \arrow[d] \arrow[drr] & \{\neg x, y, w\} \arrow[dl] & \{z, w\} \arrow[d] \arrow[ddll] & \{v\} \\
\{y, \neg z, w\} \arrow[d] & & \{x, y, w\} & \\
\{y, w\} \subseteq \lambda & & &
\end{tikzcd}$$

Antwort: ja

N-Resolution

N-Resolutionsschritt:

wie gewöhnlicher Resolutionsschritt, aber eine der Elternklauseln muss aus negativen Literalen bestehen

$$\begin{tikzcd} \{x, \neg y, z\} \arrow[dr] & & \{\neg x, \neg w\} \arrow[dl] \\ & \{\neg y, z, \neg w\} & \end{tikzcd}$$

N-Resolutionsschritt

$$\begin{tikzcd} \{\neg x, \neg y, z\} \arrow[dr] & & \{x, \neg w\} \arrow[dl] \\ & \{\neg y, z, \neg w\} & \end{tikzcd}$$

kein N-Resolutionsschritt

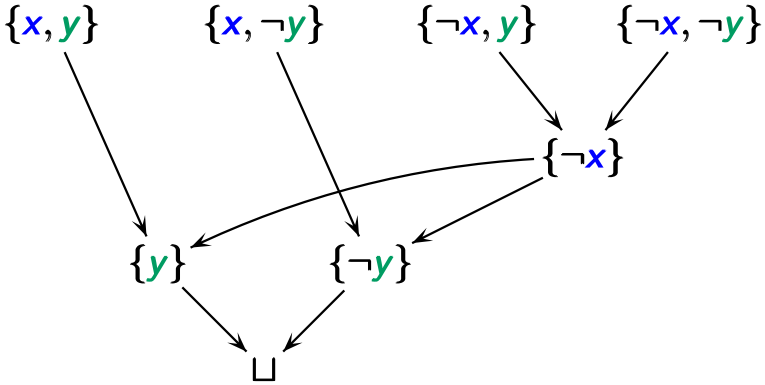
N-Herleitung: Herleitung $\langle \kappa_1, \tau_1, \lambda_1 \rangle \ \ldots \ \langle \kappa_m, \tau_m, \lambda_m \rangle$, so dass $\kappa_1, \ldots, \kappa_m$ nur aus negativen Literalen bestehen

Beispiel: N-Widerlegung

423

$$\alpha \;=\; (x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$$

unerfüllbare KNF-Formel



Sei α eine KNF-Formel.

$$Res^*(\alpha) = \bigcup_{i \geqslant 0} Res^i(\alpha) \qquad NRes^*(\alpha) = \bigcup_{i \geqslant 0} NRes^i(\alpha)$$

Es gilt stets: $\alpha \subseteq NRes^*(\alpha) \subseteq Res^*(\alpha)$

Folgerung: Korrektheit der N-Resolution

$$\alpha \Vdash \lambda \quad \text{für alle } \lambda \in NRes^*(\alpha)$$

Insbesondere: Ist $\sqcup \in NRes^*(\alpha)$, so ist α unerfüllbar.

Hauptsatz zur N-Resolution: (ohne Beweis)

$$\alpha \text{ unerfüllbar} \quad \text{gdw} \quad \sqcup \in NRes^*(\alpha)$$

$$\alpha = (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg w) \wedge (x \vee \neg z \vee w) \wedge (\neg z \vee \neg w)$$

$\uparrow$ einzige Klausel bestehend aus negativen Literalen

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\{x, \neg y, z\} \arrow[dr] & & \{\neg z, \neg w\} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \{x, \neg z, w\} \arrow[dl] \\
& \{x, \neg y, \neg w\} & & \{x, \neg z\} &
\end{tikzcd}$$

Wegen $\sqcup \notin NRes^*(\alpha)$ ist α erfüllbar.

$$NRes^*(\alpha) = \alpha \cup \{ x \vee \neg y \vee \neg w,\ x \vee \neg z \}$$

P-Resolution

P-Resolutionsschritt:

wie gewöhnlicher Resolutionsschritt, aber eine der Elternklauseln muss aus positiven Literalen bestehen

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \{\neg x, \neg y, z\} \arrow[dr] & & \{x, w\} \arrow[dl] \\ & \{\neg y, z, w\} & \end{tikzcd}$$

P-Resolutionsschritt

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \{\neg x, \neg y, z\} \arrow[dr] & & \{x, \neg w\} \arrow[dl] \\ & \{\neg y, z, \neg w\} & \end{tikzcd}$$

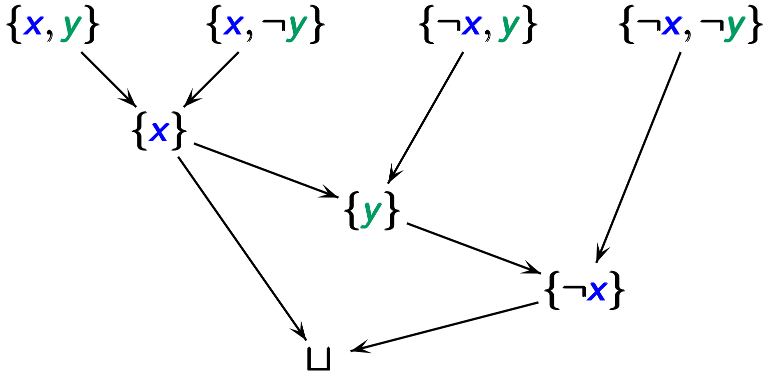
kein P-Resolutionsschritt

P-Herleitung: Herleitung $\langle \kappa_1, \tau_1, \lambda_1 \rangle \ \ldots \ \langle \kappa_m, \tau_m, \lambda_m \rangle$, so dass $\kappa_1, \ldots, \kappa_m$ nur aus positiven Literalen bestehen

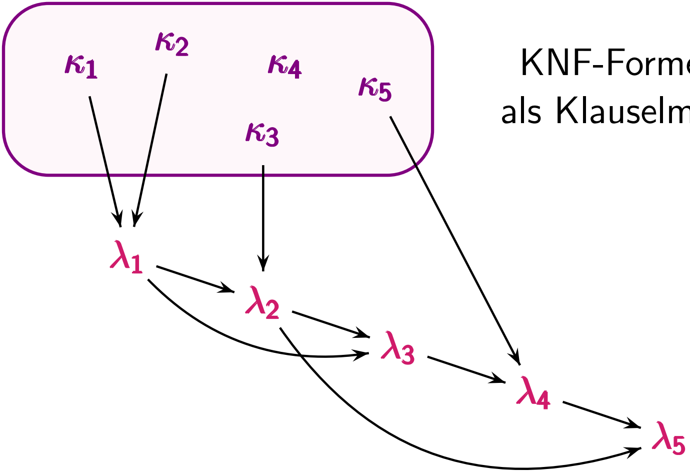
Beispiel: P-Widerlegung

$$\alpha = (x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$$

unerfüllbare KNF-Formel



Lineare Resolution



KNF-Formel α
als Klauselmenge

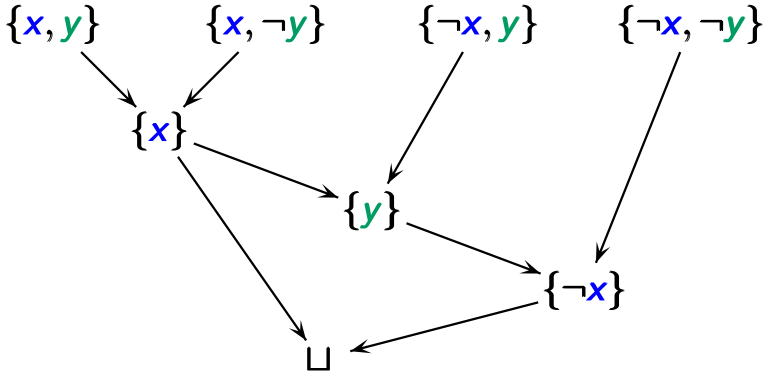
lineare Herleitung: Herleitung der Gestalt

$$\langle \tau_0, \tau_1, \lambda_1 \rangle \; \langle \lambda_1, \tau_2, \lambda_2 \rangle \; \langle \lambda_2, \tau_3, \lambda_3 \rangle \; \ldots \; \langle \lambda_{m-1}, \tau_m, \lambda_m \rangle$$

Beispiel: lineare Widerlegung

$$\alpha \;=\; (x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$$

unerfüllbare KNF-Formel



Ergebnisse zur linearen Resolution

Für jede KNF-Formel α und Klausel λ gilt:

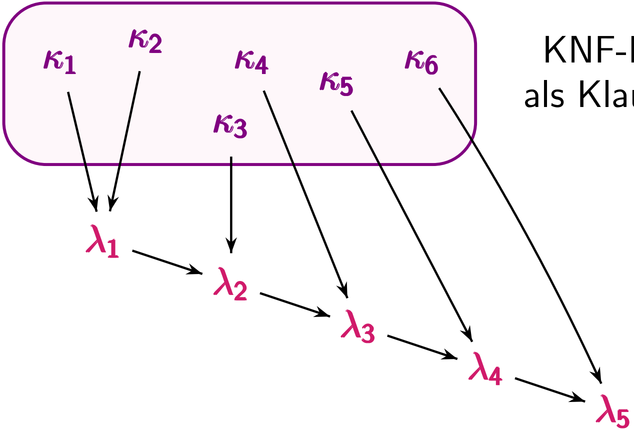
Ist λ aus α durch eine lineare Herleitung herleitbar, so gilt $\alpha \Vdash \lambda$.

Widerlegungsvollständigkeit der linearen Resolution:

$\left.\begin{array}{l}\text{es gibt eine lineare} \\ \text{Widerlegung für } \alpha\end{array}\right\}$ gdw α ist unerfüllbar

lineare Herleitung
der leeren Klausel
$\sqcup = \textit{false}$

(ohne Beweis)



KNF-Formel α als Klauselmenge

Input-Herleitung aus α:

lineare Herleitung, so dass in jedem Resolutionsschritt eine Klausel aus α als Elternklausel eingesetzt wird

Ergebnisse zur Input-Resolution

Die Input-Resolution ist korrekt, aber unvollständig.

Korrektheit: Ist $\sqcup$ durch eine Input-Herleitung aus α herleitbar, so ist α unerfüllbar.

Unvollständigkeit: es gibt unerfüllbare KNF-Formeln, die keine Input-Widerlegung haben, z.B.

$$\alpha = (x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$$

ist unerfüllbar, aber hat keine Input-Widerlegung

denn: alle Resolventen $\lambda = \kappa \setminus \{L\} \cup \tau \setminus \{\overline{L}\}$ mit $\kappa \in \alpha$ enthalten mindestens ein Literal

Resolution für Hornformeln

Resolventen von Hornklauseln sind Hornklauseln.

Beweis: Seien κ, τ Hornklauseln mit $x \in \kappa$ und $\neg x \in \tau$.

$$\lambda \;=\; \kappa \setminus \{x\} \cup \tau \setminus \{\neg x\} \quad \text{ist eine Hornklausel}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{Zielklausel} & & \text{Regel} & & \text{Regel} \\
\{\neg x, \neg z\} \arrow[dr] & & \{x, \neg y, \neg z\} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \{\neg x, w\} \arrow[dl] \\
& \{\neg y, \neg z\} & & \{\neg y, \neg z, w\} & \\
& \text{Zielklausel} & & \text{Regel} &
\end{tikzcd}$$

Sei α eine Hornformel. Dann gilt:

α ist unerfüllbar

gdw es gibt eine Widerlegung von α, so dass in jedem Resolutionsschritt eine Zielklausel als Elternklausel eingesetzt wird

gdw es gibt eine Widerlegung von α, so dass in jedem Resolutionsschritt ein Faktum als Elternklausel eingesetzt wird

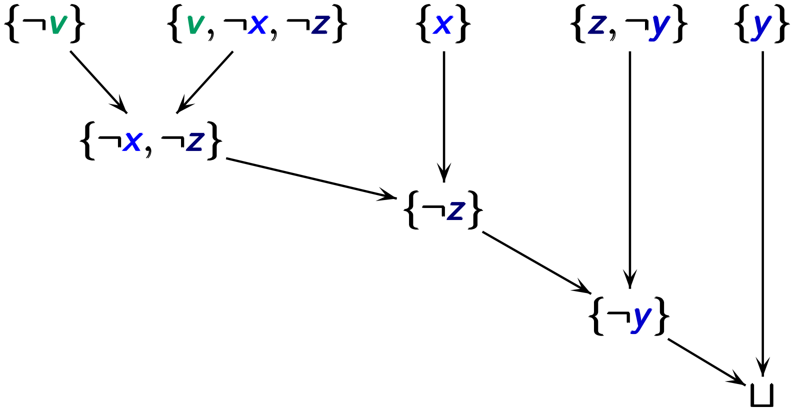
Widerlegungsvollständigkeit der N-Resolution und der P-Resolution

Beispiel: N-Resolution für Hornformeln

836

$$(v \to \mathit{false}) \;\wedge\; (x \wedge z \to v) \;\wedge\; x \;\wedge\; (y \to z) \;\wedge\; y$$

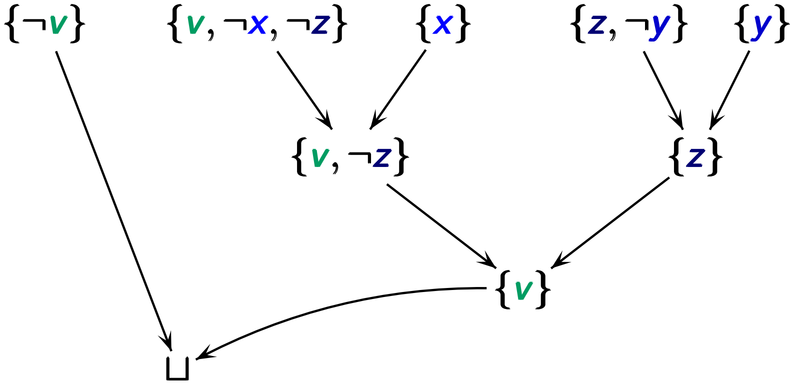
einzige Zielklausel



Beispiel: P-Resolution für Hornformeln

841

$$(v \to \mathit{false}) \wedge (x \wedge z \to v) \wedge \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fakt}}}{x} \wedge (y \to z) \wedge \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fakt}}}{y}$$



Input-Resolution für Hornformeln

> Die Input-Resolution ist für Hornformeln widerlegungsvollständig.

Regel | Zielklausel | Fakt

$$\begin{tikzcd}
\{x, \neg y, \neg z\} \arrow[dr] & & \{\neg x, \neg z\} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \{x\} \arrow[dl] \\
& \{\neg y, \neg z\} & & \{\neg z\} &
\end{tikzcd}$$

Zielklausel | Zielklausel

Jede N-Herleitung aus einer Hornformel kann als Input-Herleitung aufgefasst werden.

Beispiel: N-Widerlegung für Hornformeln

$$(v \to \mathit{false}) \;\land\; (x \land z \to v) \;\land\; x \;\land\; (y \to z) \;\land\; y$$

N-Widerlegung ist zugleich Input-Wiederlegung