4. Kurztest
Formale Systeme
am 19.01.2012

Abkürzungen

$\wedge$	-	Konjunktion
$\vee$	-	Disjunktion
$\neg$	-	Negation
$\rightarrow$	-	syntaktischer Implikationsoperator
$\leftrightarrow$	-	syntaktischer Äquivalenzsoperator
$\oplus$	-	Paritätsoperator, XOR
$\equiv$	-	semantische Äquivalenz von Formeln
$\Vdash$	-	logische Folgerung, Konsequenzrelation
PNF	-	positive Normalform
KNF	-	konjunktive Normalform
DNF	-	disjunktive Normalform

Aufgabe K1 [Transformation zu KNF-Formel]

Transformieren Sie die aussagenlogische Formel

$$\alpha = \neg(((x \wedge y) \rightarrow \neg z) \wedge (x \vee \neg y))$$

via Äquivalenzumformungen in eine KNF-Formel β mit $\alpha \equiv \beta$.

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned}\alpha &\equiv \neg((\neg(x \wedge y) \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y)) \equiv ((x \wedge y) \wedge z) \vee (\neg x \wedge y) \\ &\equiv (y \vee \neg x) \wedge (z \vee \neg x) \wedge (x \vee y) \wedge y \wedge (z \vee y)\end{aligned}$$

Aufgabe K2 [Erfüllbarkeit, Folgerungen]

Seien α, β Formeln über einer nicht-leeren Menge *AP* von Aussagensymbolen.

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Beweisen Sie die betreffende Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) $\mathfrak{F}$ ist genau dann unerfüllbar, wenn es eine aussagenlogische Formel α gibt, so dass:
$\mathfrak{F} \Vdash \alpha$ und $\mathfrak{F} \Vdash \neg\alpha$

(b) α ist genau dann erfüllbar, wenn es eine Formel β mit $\beta \Vdash \alpha$ gibt.

(c) α ist genau dann erfüllbar, wenn es eine Formel β mit $\alpha \nVdash \beta$ gibt.

(d) Aus $\gamma \Vdash \alpha \vee \beta$ folgt $\gamma \Vdash \alpha$ oder $\gamma \Vdash \beta$.

(e) Aus $\gamma \Vdash \alpha$ und $\sigma \Vdash \beta$ folgt $\gamma \leftrightarrow \sigma \Vdash \alpha \leftrightarrow \beta$.

Lösungsvorschlag:

(a) richtig.

"$\Longrightarrow$": falls $\mathfrak{F}$ unerfüllbar, dann kann aus $\mathfrak{F}$ jede Formel abgeleitet werden (Folgerung aus Lemma 4.10, S. 127)

"$\Longleftarrow$": aus $\mathfrak{F} \Vdash \alpha$ und $\mathfrak{F} \Vdash \neg\alpha$ folgt $\mathfrak{F} \Vdash \alpha \wedge \neg\alpha$. Es gilt $\alpha \wedge \neg\alpha \equiv \mathit{false}$, also $\mathfrak{F} \Vdash \mathit{false}$. Das ist nur möglich, falls $\mathfrak{F}$ unerfüllbar ist, da $\mathit{false}^{\mathcal{I}} = 0$ für beliebige Belegung $\mathcal{I}$ gilt.

(b) falsch, da $\mathit{false} \Vdash \mathit{false}$

(c) richtig.

Einerseits: $\alpha \nVdash \neg\alpha$, falls α erfüllbar ist.

Andererseits: $\alpha \Vdash \beta$ gilt stets, wenn α unerfüllbar ist.

(d) falsch, z.B. $\gamma = x \vee y, \alpha = x, \beta = y$

(e) falsch, z.B. $\gamma = \sigma = \mathit{false}, \alpha, \beta$ beliebig, so dass $\alpha \leftrightarrow \beta$ nicht gültig

Aufgabe K3 [Paritätsoperator (xor)]

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Dabei sind x, y, z Atome, also Elemente der zugrundeliegenden Menge AP von Aussagensymbolen. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $x \oplus (\neg y) \equiv x \leftrightarrow y$

(b) $x \vee y \Vdash x \oplus y$

(c) $y \leftrightarrow (y \vee x) \Vdash (\neg x) \oplus x$

(d) $(y \oplus y) \oplus z \Vdash \neg x \oplus (x \oplus z)$

Lösungsvorschlag:

(a) Richtig, denn für jede Belegung $\mathcal{I}$ gilt:

$$\begin{array}{lll} (x \oplus (\neg y))^{\mathcal{I}} = 1 & \text{gdw} & x^{\mathcal{I}} \neq (\neg y)^{\mathcal{I}} \\ & \text{gdw} & x^{\mathcal{I}} = y^{\mathcal{I}} \\ & \text{gdw} & (x \leftrightarrow y)^{\mathcal{I}} = 1 \end{array}$$

(b) Falsch, da für $x^{\mathcal{I}} = y^{\mathcal{I}} = 1$ gilt: $(x \vee y)^{\mathcal{I}} = 1$ und $(x \oplus y)^{\mathcal{I}} = 0$

(c) Richtig.

Es gilt $(\neg x) \oplus x \equiv \mathit{true}$ und für jede Formel α gilt:

$\alpha \Vdash \mathit{true}$

(d) Falsch, da für jede Belegung $\mathcal{I}$ mit $z^{\mathcal{I}} = 1$ gilt:

$((y \oplus y) \oplus z)^{\mathcal{I}} = 1$ und $(\neg x \oplus (x \oplus z))^{\mathcal{I}} = 0$

Aufgabe K4 [Folgerungsrelation $\Vdash$]

Ist die folgende Schlussfolgerung korrekt?

Seien a, b, c ganze Zahlen, die von 0 verschieden sind.

Wenn a negativ ist, dann ist c negativ. Wenn b positiv ist, dann ist c negativ.

Daher gilt: Wenn a negativ oder c positiv ist, dann ist b negativ.

Lösungsvorschlag:

nicht korrekt.

Aussage x stehe für $a > 0$, y für $b > 0$ und z für $c > 0$.

Dann erhalten wir aus den obigen Aussagen $\neg x \to \neg z$ und $y \to \neg z$.

Wir wollen zeigen, dass $(\neg x \to \neg z) \wedge (y \to \neg z) \nVdash \neg x \vee z \to \neg y$ gilt.

Wir suchen demzufolge eine nicht erfüllende Belegung I für die Formel

$\alpha = ((\neg x \to \neg z) \ \wedge (y \to \neg z)) \to ((\neg x \vee z) \to \neg y)$

Damit $\alpha^I = 0$ wird, müssen sowohl die 3. als auch die 4. Implikation den Wert 0 erhalten, d.h. $y^I = 1$. Die ersten beiden Implikationen müssen wahr werden, d.h. $z^I = 0$ (wegen $y^I = 0$). Des weiteren kann man schließen, dass $x^I = 0$ gelten muß, damit sich $(\neg x \vee z)^I = 1$ ergibt. Damit kann auch $(\neg x \to \neg z)^I = 1$ gesichert werden. Die Belegung I mit $x^I = 0$, $y^I = 1$ und $z^I = 0$ ist demzufolge eine nicht erfüllende Belegung für α.

Aufgabe K5 [aussagenlogische Formel über $x_1, \ldots, x_n$]

Geben Sie eine aussagenlogische Formel α_n an, deren Modelle genau diejenigen Belegungen I sind, für die die Anzahl an Atomen x_j mit $x_j^I = 1$ nicht durch 3 teilbar ist.

Lösungsvorschlag:

Angabe einer KNF mittels Maxterme. Die Maxterme sind alle Klauseln $L_1 \vee \ldots \vee L_n$, so dass $L_j = x_j$ oder $L_j = \neg x_j$, so dass $\left| j \in \{1, \ldots, n\} : x_j^I = 1 \right|$ ist durch 3 teilbar (d.h. $\alpha_n^I = 0$). Falls $x_j^I = 1$, so $L_j = \neg x_j$, andernfalls $L_j = x_j$. Die KNF ergibt sich als Konjunktion der Maxterme.

Aufgabe K6 [PNF]

Jeder PNF-Formel kann ein Polynom zugeordnet werden. Hierzu setzen wir

$$
\begin{array}{lcr}
p(true) & = & 1 \\
p(false) & = & 0 \\
p(x) & = & x \\
p(\neg x) & = & 1-x \\
p(\alpha_1 \wedge \alpha_2) & = & p(\alpha_1)\cdot p(\alpha_2) \\
p(\alpha_1 \vee \alpha_2) & = & p(\alpha_1)+p(\alpha_2)
\end{array}
$$

Beispielsweise ist also

$$p(\neg x \wedge (y \vee \neg z)) = (1-x)\cdot(y+(1-z)).$$

(a) Zeigen Sie: Ist α eine PNF-Formel mit $Atoms(\alpha) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, so gilt:

$$\alpha \text{ erfüllbar gdw. } \sum_{(b_1,..,b_n)\in\{0,1\}^n} p(\alpha)(b_1,\ldots,b_n) \neq 0.$$

(Dabei wird $p(\alpha)$ als Funktion $\{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ angesehen, b_i steht für die Belegung des Atoms x_i.)

(b) Gilt die entsprechende Aussage auch für beliebige aussagenlogische Formeln, wenn $p(\neg\alpha) = 1 - p(\alpha)$ gesetzt wird?

Lösungsvorschlag:

a) Durch strukturelle Induktion sieht man leicht:. $p(\alpha) \geq 0$ und für α erfüllbar $p(\alpha) > 0$. Es gilt :

$$\alpha \text{ erfüllbar } \Leftrightarrow \ \exists I \text{ für } \alpha \text{ mit } \alpha^I = 1 \Leftrightarrow \ p(\alpha) > 0$$

b) Gegenbeispiel : $\alpha = true \vee \neg(true \vee true)$. $p(\alpha) = 1 + (1-(1+1)) = 0$