Aufgabe 9.3: NKA für CFG in Greibach Normalform

Die CFG mit den Regeln

$$S \;\to\; aA \;\Big|\; bB \;\Big|\; aSA \;\Big|\; bSB$$
$$A \to a$$
$$B \to b$$

ist in Greibach Normalform
und erzeugt die Sprache $\left\{ww^R : w \in \{a, b\}^+\right\}$.
(Korrektheit)

Linksableitung in G für das Wort $w = abba$:
$S \Rightarrow_L aSA \Rightarrow_L abBA \Rightarrow_L abbA \Rightarrow_L abba$

Aufgabe 9.3: NKA für CFG in Greibach Normalform

$$S \rightarrow aA \mid bB \mid aSA \mid bSB$$
$$A \rightarrow a \qquad\qquad B \rightarrow b$$

NKA $\mathcal{K} = (\{q_0\}, \{a, b\}, \{A, S, B\}, \delta, q_0, S)$, wobei

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a, S) &= \{(q_0, A), (q_0, SA)\} \\
\delta(q_0, b, S) &= \{(q_0, B), (q_0, SB)\} \\
\delta(q_0, a, A) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \\
\delta(q_0, b, B) &= \{(q_0, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

akzeptierenden Lauf in $\mathcal{K}$ für das Wort $w = abba$:

$$\begin{aligned}
(q_0, abba, S) &\vdash (q_0, bba, SA) \\
&\vdash (q_0, ba, BA) \\
&\vdash (q_0, a, A) \\
&\vdash (q_0, \varepsilon, \varepsilon)
\end{aligned}$$

Aufgabe 9.4: CFG für NKA

NKA $\mathcal{K} \;=\; (\{q_0, q_F\}, \{0,1\}, \{0,1,\#\}, \delta, q_0, \#)$, mit

$$
\begin{array}{lcllcl}
\delta(q_0, \varepsilon, \#) & = & \{(q_0, \varepsilon)\} & & & \\
\delta(q_0, 0, \#) & = & \{(q_0, 0\#)\} & \delta(q_0, 1, \#) & = & \{(q_0, 1\#), (q_F, \varepsilon)\} \\
\delta(q_0, 0, 0) & = & \{(q_0, 00)\} & \delta(q_0, 1, 1) & = & \{(q_0, 11), (q_F, \varepsilon)\} \\
\delta(q_0, 1, 0) & = & \{(q_0, \varepsilon), (q_F, \varepsilon)\} & \delta(q_0, 0, 1) & = & \{(q_0, \varepsilon), (q_F, \varepsilon)\} \\
\delta(q_F, \varepsilon, 1) & = & \{(q_F, \varepsilon)\} & \delta(q_F, \varepsilon, \#) & = & \{(q_F, \varepsilon)\}
\end{array}
$$

und $\delta(\cdot) = \varnothing$ in allen verbleibenden Fällen.

akzeptierender Lauf in $\mathcal{K}$ für $w = 10110$:

$$
\begin{array}{lcl}
(q_0, 10110, \#) & \vdash & (q_0, 0110, 1\#) \\
 & \vdash & (q_0, 110, \#) \\
 & \vdash & (q_0, 10, 1\#) \\
 & \vdash & (q_0, 0, 11\#) \\
 & \vdash & (q_F, \varepsilon, 1\#) \\
 & \vdash & (q_F, \varepsilon, \#) \\
 & \vdash & (q_F, \varepsilon, \varepsilon)
\end{array}
$$

Aufgabe 9.4: CFG für NKA

$G = (V, \{0, 1, \#\}, \mathcal{P}, S)$ mit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$ und
$V = \{S\} \cup \{q_0, q_F\} \times \{0, 1, \#\} \times \{q_0, q_F\}$ und:

$$
\begin{array}{rcll}
S & \rightarrow & \langle q_0, \#, q_0\rangle \big| \langle q_0, \#, q_F\rangle & \\
\langle q_0, A, p\rangle & \rightarrow & 0\langle q_0, 0, p_1\rangle\langle p_1, A, p\rangle & , A \in \{\#, 0\}, p, p_1 \in \{q_0, q_F\} \\
\langle q_0, A, p\rangle & \rightarrow & 1\langle q_0, 1, p_1\rangle\langle p_1, A, p\rangle & , A \in \{\#, 1\}, p, p_1 \in \{q_0, q_F\} \\
\langle q_0, 0, p\rangle & \rightarrow & 1 & , p \in \{q_0, q_F\} \\
\langle q_0, 1, p\rangle & \rightarrow & 0 & , p \in \{q_0, q_F\} \\
\langle q_0, A, q_F\rangle & \rightarrow & 1 & , A \in \{\#, 1\} \\
\langle q_F, A, q_F\rangle & \rightarrow & \varepsilon & , A \in \{\#, 1\} \\
\langle q_0, \#, q_0\rangle & \rightarrow & \varepsilon &
\end{array}
$$

Linksableitung in G für $w = 10110$:

$$
\begin{array}{rl}
S & \Rightarrow \langle q_0, \#, q_F\rangle \Rightarrow 1\langle q_0, 1, q_0\rangle\langle q_0, \#, q_F\rangle \Rightarrow 10\langle q_0, \#, q_F\rangle \\
& \Rightarrow 101\langle q_0, 1, q_F\rangle\langle q_F, \#, q_F\rangle \\
& \Rightarrow 1011\langle q_0, 1, q_F\rangle\langle q_F, 1, q_F\rangle\langle q_F, \#, q_F\rangle \\
& \Rightarrow 10110\langle q_F, 1, q_F\rangle\langle q_F, \#, q_F\rangle \\
& \Rightarrow 10110\langle q_F, \#, q_F\rangle \Rightarrow 10110
\end{array}
$$

Aufgabe 9.2: NKA für Vereinigung, Konkatenation und Kleeneabschluss

NKA $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ mit Akzeptanz über Endzustände:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1 &= (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_{0,1}, \#_1, F_1),\\ \mathcal{K}_2 &= (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_{0,2}, \#_2, F_2)\end{aligned}$$

O.E. gelte $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$, $\#_1 = \#_2 \stackrel{\text{def}}{=} \#$ und $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{\#\}$.

Vereinigung:
NKA $\mathcal{K}_1 \uplus \mathcal{K}_2 = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, \#, F)$,
mit Akzeptanz über Endzustände

- $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$, wobei $q_0 \notin Q_1 \cup Q_2$,
- $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$,
- $F = F_1 \cup F_2$,
-
  - $\delta(q_0, \varepsilon, \#) = \{(q_{0,1}\,\#), (q_{0,2}\,\#)\}$,
  - $\delta(q, a, A) = \delta_i(q, a, A)$ und $\delta(q, \varepsilon, A) = \delta_i(q, \varepsilon, A)$ für $q \in Q_i$, $a \in \Sigma$ und $A \in \Gamma_i$ mit $i \in \{1, 2\}$,
  - und $\delta(q_0, \cdot) = \varnothing$ sonst.

Aufgabe 9.2: NKA für Vereinigung, Konkatenation und Kleeneabschluss

NKA $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ mit Akzeptanz über Endzustände:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 &= (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_{0,1}, \#_1, F_1), \\ \mathcal{K}_2 &= (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_{0,2}, \#_2, F_2) \end{aligned}$$

O.E. gelte $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$, $\#_1 = \#_2 \stackrel{\text{def}}{=} \#$ und $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{\#\}$.

Konkatenation: (Konstruktion ähnlich wie für ε-NFA.)

- Zusätzliches Kellersymbol \$, liegt initial auf Kellerboden und verhindert Terminierung, falls $\mathcal{K}_1$ in (q, x, ε) anhält.
- Endzustand von $\mathcal{K}_1$ erreicht, dann entscheidet NKA $\mathcal{K}_1 \circ \mathcal{K}_2$ nichtdeterministisch
  - Simulation von $\mathcal{K}_1$ beenden und $\mathcal{K}_2$ zu simulieren
  - oder Simulation von $\mathcal{K}_1$ fortzusetzen.

  Im ersten Fall ist ein "Reset" des Kellers nötig, d.h., Keller wird via ε-Transitionen und Hilfszustände (bis auf \$) entleert, dann Kellerstartsymbol $\#_2$ über \$ gelegt.
- Erst dann eigentliche Simulation von $\mathcal{K}_2$.

Aufgabe 9.2: NKA für Vereinigung, Konkatenation und Kleeneabschluss

Kleeneabschluss: (Ebenfalls ähnlich wie ε-NFA)

mit zusätzlichem Kellersymbol \$, das initial auf den Kellerboden gelegt wird.

Wie bei der Konkatenation muss der Keller für jedes "Restart" zuerst bereinigt werden.

Aufgabe 9.1: NKA für $\{w \in \{a, b, c\}^* : w = w^R\}$

NKA $\mathcal{K}_\varepsilon = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ mit Akzeptanz bei leerem Keller:

- $Q = \{q^+, q^-\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $\Gamma = \{a, b, c, \#\}$
- $q_0 = q^+$
- Endzustände: nicht relevant
- δ für $d, e \in \{a, b, c\}$:

$$
\begin{array}{lcll}
\delta(q^+, \varepsilon, \#) & = & \{(q^-, \varepsilon)\} & (1) \\
\delta(q^+, d, \#) & = & \{(q^+, d), (q^-, \varepsilon), (q^-, d)\} & (2),(3),(4) \\
\delta(q^+, d, e) & = & \{(q^+, de), (q^-, de), (q^-, e)\} & (5),(6),(7) \\
\delta(q^-, d, d) & = & (q^-, \varepsilon) & (8) \\
\delta(\ldots) & = & \emptyset, \ \text{sonst} &
\end{array}
$$

Behauptung:
$\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}_\varepsilon) = \{ w \in \{a, b, c\}^* : w = w^R \}$

Aufgabe 9.1: NKA $\mathcal{K}'_F$

$\mathcal{K}'_F$ mit Akzeptanz durch Endzustände:
$\mathcal{K}'_F \;=\; (Q \cup \{q'_0, q_F\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\bot\}, \delta', q'_0, \#, \{q_F\})$,
wobei $\bot \notin \Gamma$, $q'_0, q_F \notin Q$ und $q'_0 \neq q_F$.

Für $d \in \Sigma$, $A \in \Gamma$ und $q \in Q$:

$$\begin{array}{lcl} \delta'(q'_0, \varepsilon, \#) & = & \{(q_0, \#\bot)\}, \\ \delta'(q, d, A) & = & \delta(q, d, A), \\ \delta'(q, \varepsilon, \bot) & = & \{(q_F, \varepsilon)\} \end{array}$$

In allen verbleibenden Fällen $\delta'(\cdot) = \emptyset$.

Aufgabe 9.1: NKA $\mathcal{K}'_F$

Akzeptierender Lauf in $\mathcal{K}_\varepsilon$ für *ababa*:

$$\begin{array}{rcl}
(q^+, ababa, \#) & \vdash & (q^+, baba, a\#) \\
& \vdash & (q^+, aba, ba\#) \\
& \vdash & (q^-, ba, ba\#) \\
& \vdash & (q^-, a, a\#) \\
& \vdash & (q^-, \varepsilon, \#) \\
& \vdash & (q^-, \varepsilon, \varepsilon)
\end{array}$$

$\Longrightarrow ababa \in \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}_\varepsilon)$

Akzeptierender Lauf von $\mathcal{K}_F$ für das Wort *ababa*:

$$\begin{array}{rcl}
(q'_0, ababa, \#\bot) & \vdash & (q^+, baba, a\#\bot) \\
& \vdash & (q^+, aba, ba\#\bot) \\
& \vdash & (q^-, ba, ba\#\bot) \\
& \vdash & (q^-, a, a\#\bot) \\
& \vdash & (q^-, \varepsilon, \#\bot) \\
& \vdash & (q^-, \varepsilon, \bot) \\
& \vdash & (q_F, \varepsilon, \varepsilon)
\end{array}$$

$\Longrightarrow ababa \in \mathcal{L}(\mathcal{K}_F)$

Aufgabe 9.1: NKA $\mathcal{K}'_F$

Akzeptierender Lauf in $\mathcal{K}_\varepsilon$ für *abba*:

$$\begin{array}{lll} (q^+, abba, \#) & \vdash & (q^+, bba, a\#) \\ & \vdash & (q^-, ba, ba\#) \\ & \vdash & (q^-, a, a\#) \\ & \vdash & (q^-, \varepsilon, \#) \\ & \vdash & (q^-, \varepsilon, \varepsilon) \end{array}$$

$\Longrightarrow abba \in \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}_\varepsilon)$

Akzeptierender Lauf von $\mathcal{K}_F$ für das Wort *abba*:

$$\begin{array}{lll} (q'_0, abba, \#\bot) & \vdash & (q^+, bba, a\#\bot) \\ & \vdash & (q^-, ba, ba\#\bot) \\ & \vdash & (q^-, a, a\#\bot) \\ & \vdash & (q^-, \varepsilon, \#\bot) \\ & \vdash & (q^-, \varepsilon, \bot) \\ & \vdash & (q_F, \varepsilon, \varepsilon) \end{array}$$

$\Longrightarrow abba \in \mathcal{L}(\mathcal{K}_F)$