# Formale Systeme

WS 2011/12
TU Dresden
Fakultät Informatik
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl für Algebraische und Logische Grundlagen der Informatik

Christel Baier, Walter Nauber, Michael Posegga,

Manuela Berg, Paul Nitzsche, Thomas Kühn, Marco Voigt

# 13. Übungsblatt

Hinweise zur Vorlesung finden Sie unter
http://wwwtcs.inf.tu-dresden.de/ALGI/FS/

Besprechung : 23.01.2012 – 27.01.2012

## Aufgabe 13.1 [Länge vs. Anzahl an Teilformeln] **(792)**

Die Menge aller Teilformeln aussagenlogischer Formeln über *AP* ist durch strukturelle Induktion definiert:[1]

$$\begin{aligned}
\mathit{subf}(\mathit{true}) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\mathit{true}\} \\
\mathit{subf}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \{x\} \quad \text{für } x \in \mathit{AP} \\
\mathit{subf}(\neg\alpha) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\neg\alpha\} \cup \mathit{subf}(\alpha) \\
\mathit{subf}(\alpha_1 \wedge \alpha_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha_1 \wedge \alpha_2\} \cup \mathit{subf}(\alpha_1) \cup \mathit{subf}(\alpha_2)
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Anzahl an Teilformeln von $\alpha$ durch $2|\alpha|+1$ beschränkt ist, also dass $\big|\mathit{subf}(\alpha)\big| \leqslant 2|\alpha|+1$. Dabei ist $|\alpha|$ die wie in der Vorlesung definierte Länge von aussagenlogischen Formeln.

## Aufgabe 13.2 [Transformation zu KNF/DNF-Formel] **(719m)**

Sei $\alpha_n = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ der n-stellige Paritätsoperator (xor).

(a) Zeigen Sie, daß jede KNF-Formel $\beta_n$ mit $\alpha_n \equiv \beta_n$ mindestens exponentielle Länge in $n$ besitzt.

(b) Zeigen Sie, daß jede DNF-Formel $\gamma_n$ mit $\alpha_n \equiv \gamma_n$ mindestens exponentielle Länge in $n$ besitzt.

## Aufgabe 13.3 [Erfüllbarkeitstest für Hornformeln ] **(793)**

Wenden Sie den in der Vorlesung besprochenen Erfüllbarkeitstest HORN-SAT auf folgende Hornformeln an. Geben Sie das kleinste Modell für die betreffende Hornformel an, sofern diese erfüllbar ist.

(a)
$$\alpha = (\neg s \vee q) \wedge q \wedge (\neg s \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee s) \wedge (\neg w \vee \neg u)$$

(b)
$$\begin{aligned}
\beta = \; & (\neg q \vee \neg s \vee t \vee \neg p) \wedge (u \vee \neg s \vee \neg r) \wedge q \wedge \\
& (\neg p \vee \neg t \vee w) \wedge (\neg u \vee \neg s) \wedge (\neg u \vee \neg p) \wedge \\
& (\neg q \vee r) \wedge p \wedge (t \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg w \vee \neg u)
\end{aligned}$$

[1]Die Abkürzung “subf” steht für “subformulae”.

## Aufgabe 13.4 [Dualitätsoperator für PNF-Formeln] **(794)**

Sei $\alpha$ eine PNF-Formel über der Menge *AP* von Aussagensymbolen. Die zu $\alpha$ duale Formel $\widetilde{\alpha}$ entsteht aus $\alpha$, indem Vorkommen eines jedes Literal $L$ in $\alpha$ durch das komplementäre Literal $\overline{L}$ ersetzt wird. (Die Ersetzung der Literale erfolgt gleichzeitig.) Ist z.B. $\alpha = \neg x \wedge (\neg y \vee (x \wedge \neg z))$, so ist $\widetilde{\alpha} = x \wedge (y \vee (\neg x \wedge z))$.

(a) Geben Sie eine induktive Definition von $\widetilde{\alpha}$ an.

(a) Beweisen oder widerlegen Sie: $\widetilde{\alpha} \equiv \neg\alpha$.

(c) Eine KNF-Formel $\alpha$ heißt duale Hornformel, falls $\widetilde{\alpha}$ eine Hornformel ist. Zeigen Sie, dass das Erfüllbarkeitsproblem für duale Hornformeln in polynomieller Zeit lösbar ist.

## Aufgabe 13.5 [Folgerungsproblem für Hornformeln] **(796)**

Geben Sie einen Algorithmus für das Problem HORN-CONS

| | |
|---|---|
| gegeben: | zwei Hornformeln $\alpha$ und $\beta$ |
| gefragt: | gilt $\alpha \Vdash \beta$ ? |

an, dessen Laufzeit polynomiell in der Länge von $\alpha$ und $\beta$ beschränkt ist.

## Aufgabe 13.6 [Wie lagen die Karten?] **(779)**

Von einem Kartenstoß nehmen wir 4 Karten K1 bis K4 und legen Sie nebeneinander auf den Tisch. Peter wirft einen Blick auf die Anordnung der Karten und erinnert sich später an folgende Fakten:

1. Ein König lag unmittelbar links neben einer Herz-Karte.
2. Ein Ober lag unmittelbar rechts neben einer Grün-Karte.
3. Eine Schellen-Karte lag unmittelbar rechts neben einem König.
4. Eine Eichel-Karte lag nicht unmittelbar neben einer Herz-Karte
   aber unmittelbar links von einem Daus.

Stellen Sie das Kartenproblem durch aussagenlogische Konzepte dar, indem Sie geeignete Atome wählen und eine Formel $\alpha$ angeben, so dass die obigen Aussagen in Eins-zu-Eins-Beziehung zu den Modellen von $\alpha$ stehen.

Ermitteln Sie die Anordnung der auf den Tisch abgelegten 4 Karten.

Geben Sie eine formale Begründung auf aussagenlogischer Basis.

verwendete Bezeichnungen:

deutsches Blatt - französisches Blatt:

Daus - As, König - König, Ober - Dame,

Eichel - Kreuz, Grün - Pik, Herz - Herz, Schellen - Karo