

Probeklausur Formale Systeme 31.01.2012

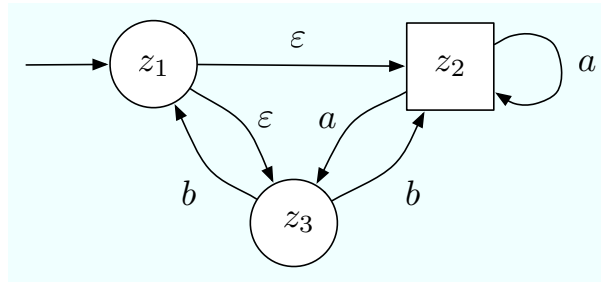
(Bearbeitungszeit: 90 Minuten)

Abkürzungen

DFA	-	deterministischer endlicher Automat
NFA	-	nichtdeterministischer endlicher Automat
NKA	-	nichtdeterministischer Kellerautomat
\wedge	-	Konjunktion
\vee	-	Disjunktion
\neg	-	Negation
\rightarrow	-	syntaktischer Implikationsoperator
\leftrightarrow	-	syntaktischer Äquivalenzoperator
\oplus	-	Paritätsoperator, XOR
\equiv	-	semantische Äquivalenz von Formeln
\Vdash	-	logische Folgerung, Konsequenzrelation
DNF	-	disjunktive Normalform
KNF	-	konjunktive Normalform
(* ... *)	-	Kommentarklammern

Aufgabe K1 [ϵ -NFA \rightarrow DFA]

Gegeben ist folgender ϵ -NFA \mathcal{M}



Skizzieren Sie einen äquivalenten DFA \mathcal{M}' . Geben Sie Ihren Lösungsweg an. Falls dieser von den Methoden der Vorlesung abweicht, ist die Korrektheit zu begründen.

Antwort :

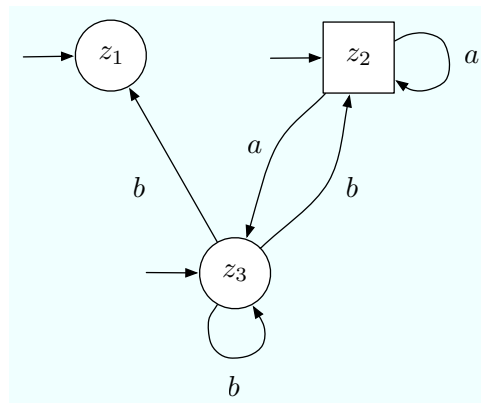
Entfernen der ϵ -Transitionen gemäß Vorlesung:

(*

1) z_2 und z_3 werden zu Startzuständen, da sie vom Startzustand z_1 mit einer ϵ -Transition erreichbar waren.

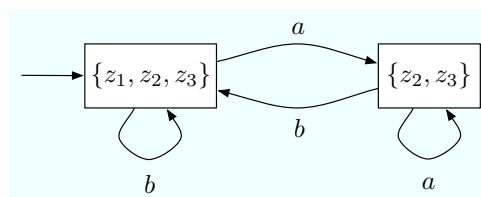
2) Zustände, die einen Folgezustand erreichen, der eine ϵ -Transition besitzt, werden direkt mit dem Nachfolgerknoten zu dem die ϵ -Transition hinführt, verbunden.

*)



Hinweis: Der Zustand z_1 könnte gestrichen werden, da von dort aus kein Endzustand erreichbar ist.

Der äquivalente DFA \mathcal{M}' (gemäß Potenzmengenkonstruktion):



Aufgabe K2 [reguläre Sprache]

Ist die folgende Sprache regulär?

$$L_{\text{fakultät}} = \{a^m : m \geq 1\}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Antwort:

Angenommen $L_{\text{fakultät}}$ sei regulär. Dann gibt es eine Pumpingzahl $p \geq 1$. Es gilt $x = a^{(p+1)!} \in L_{\text{fakultät}}$ und $|x| = (p+1)! \geq p$. Gemäß Pumping-Lemma ergibt sich dann:

Für jede Zerlegung $x = uvw$ gilt $|uv| \leq p$ (somit auch $|v| \leq p$) und $|v| \geq 1$ und es muß $uv^2w \in L_{\text{fakultät}}$ sein. Wegen $(p+1)! = |x| = |uvw| < |uv^2w| = |uvw| + |v| \leq (p+1)! + p < (p+1)! + (p+1) * (p+1)! = (p+2) * ((p+1)!) = (p+2)!$ ist aber $(p+1)! < |uv^2w| < (p+2)!$, also ist die Länge von $|uv^2w|$ keine Fakultätszahl, d.h. $uv^2w \notin L_{\text{fakultät}}$, Widerspruch. $L_{\text{fakultät}}$ ist somit nicht regulär.

andere Lösungsvariante:

Man ermittelt für $L_{\text{fakultät}}$ mit $\Sigma = \{a\}$ die Nerode-Äquivalenzklassen.

(*

Definition Nerode-Äquivalenz:

$L \subseteq \Sigma^*$ und für alle $x, y \in \Sigma^*$:

$$x \sim_L y \text{ gdw } \begin{cases} \text{für alle } z \in \Sigma^* \text{ gilt:} \\ xz \in L \iff yz \in L \end{cases}$$

Die Äquivalenzklasse von $x \in \Sigma^*$ bzgl. \sim_L : $[x]_{\sim_L} = \{y \in \Sigma^* : x \sim_L y\}$.

*)

Behauptung:

Die Nerode-Äquivalenzklassen lauten $[x]_{\sim_{L_{\text{fakultät}}}} = \{x\}$ mit $x \in \mathcal{L}(a^*)$, d.h. jedes Wort der Form $a^n, n \geq 0$ bildet eine eigene Äquivalenzklasse.

Beweis:

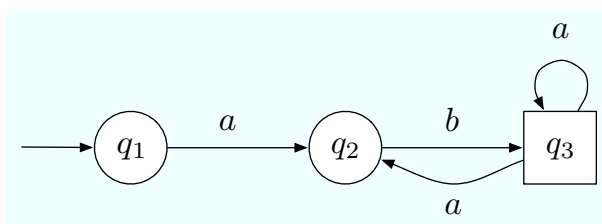
Angenommen es gibt zwei unterschiedliche Wörter $x = a^k (k \geq 0), y = a^n (n \geq 0)$ mit $x, y \in [x]_{\sim_{L_{\text{fakultät}}}}$. O.B.d.A. sei $n = k + d$ mit $d \geq 1$. Wir wählen nun ein $z = a^p$ derart, daß $k + p$ eine Fakultätszahl $q! (q \in \mathbb{N}^+)$ ergibt, für die die Ungleichung $q * q! > d$ gelte. Dies ist stets möglich, da es beliebig große Fakultätszahlen gibt. Damit gilt: $|xz| = k + p = q!$ und $q! < |yz| = n + p = k + d + p = q! + d < q! + q * q! = (q+1) * q! = (q+1)!$, d.h. $xz \in L_{\text{fakultät}}$ und $yz \notin L_{\text{fakultät}}$. Demzufolge gilt $x \not\sim_{L_{\text{fakultät}}} y$, d.h. $y \notin [x]_{\sim_{L_{\text{fakultät}}}}$, Widerspruch. Also bildet jedes Wort der Form $a^n, n \geq 0$ eine eigene Äquivalenzklasse.

Schlußfolgerung:

Da es unendlich viele Wörter $a^n, n \geq 0$ gibt, ist der Nerode-Index von $L_{\text{fakultät}}$ unendlich. Daraus folgt nach dem Satz von Myhill & Nerode, daß die Sprache $L_{\text{fakultät}}$ nicht regulär ist.

Aufgabe K3 [NFA -> regulärer Ausdruck]

Gegeben ist der folgende NFA \mathcal{M}



Geben Sie für den NFA \mathcal{M} einen regulären Ausdruck α an, sodaß $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\mathcal{M})$. Verwenden Sie dafür die Methode des dynamischen Programmierens.

Antwort :

Es wird die in der Vorlesung vorgestellte Methode des dynamischen Programmierens verwendet:

(* Es werden die Zwischensprachen $L_{i,j}^k$ mit (hier) $k = 0, 1, 2, 3$ und $i, j = 1, 2, 3$ und die sie beschreibenden regulären Ausdrücke $\alpha^k[i, j]$ betrachtet. Inhaltlich bedeutet

$$L_{i,j}^k = \left\{ w \in \Sigma^* \mid \delta(q_i, w) = q_j \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} \text{höchstens die Zwi-} \\ \text{schenzustände } q_1, \dots, q_k \\ \text{besucht werden} \end{array} \right\}$$

Daraus ergibt sich insbesondere für die Startsprachen

$$\begin{aligned} L_{i,j}^0 &= \{x \in \Sigma \mid \delta(q_i, x) = q_j\} && \text{für } i \neq j \\ L_{i,i}^0 &= \{\varepsilon\} \cup \{x \in \Sigma \mid \delta(q_i, x) = q_i\} && \text{für } i = j \end{aligned}$$

und als Rekursion

$$L_{i,j}^{k+1} = L_{i,j}^k \cup L_{i,k+1}^k (L_{k+1,k+1}^k)^* L_{k+1,j}^k$$

bzw. für die regulären Ausdrücke:

$$\alpha^{k+1}[i, j] = \alpha^k[i, j] + \alpha^k[i, k+1] (\alpha^k[k+1, k+1])^* \alpha^k[k+1, j]$$

*)

In unserem Fall ist die Sprache $L_{1,3}^3$ gesucht, deren regulärer Ausdruck $\alpha^3[1, 3]$ ist.

Also:

$$\boxed{k = 0}$$

$$\begin{array}{lll} \alpha^0[1, 1] = \varepsilon & \alpha^0[1, 2] = a & \alpha^0[1, 3] = \emptyset \\ \alpha^0[2, 1] = \emptyset & \alpha^0[2, 2] = \varepsilon & \alpha^0[2, 3] = b \\ \alpha^0[3, 1] = \emptyset & \alpha^0[3, 2] = a & \alpha^0[3, 3] = a + \varepsilon \end{array}$$

$$k = 1$$

$$\alpha^1[i, j] = \alpha^0[i, j] + \alpha^0[i, 1](\alpha^0[1, 1])^* \alpha^0[1, j]$$

$$\alpha^1[1, 1] = \varepsilon + \varepsilon \varepsilon^* \varepsilon = \varepsilon$$

$$\alpha^1[1, 2] = a$$

$$\alpha^1[1, 3] = \emptyset$$

$$\alpha^1[2, 1] = \emptyset$$

$$\alpha^1[2, 2] = \varepsilon$$

$$\alpha^1[2, 3] = b$$

$$\alpha^1[3, 1] = \emptyset$$

$$\alpha^1[3, 2] = a$$

$$\alpha^1[3, 3] = a + \varepsilon$$

$$k = 2$$

$$\alpha^2[i, j] = \alpha^1[i, j] + \alpha^1[i, 2](\alpha^1[2, 2])^* \alpha^1[2, j]$$

$$\alpha^2[1, 1] = \varepsilon$$

$$\alpha^2[1, 2] = a$$

$$\alpha^2[1, 3] = \emptyset + a \varepsilon^* b = ab$$

...

$$\alpha^2[3, 3] = a + \varepsilon + a \varepsilon^* b = \varepsilon + a + ab$$

$$k = 3$$

$$\alpha^3[i, j] = \alpha^2[i, j] + \alpha^2[i, 3](\alpha^2[3, 3])^* \alpha^2[3, j]$$

insbesondere wird nur benötigt

$$\alpha^3[1, 3] = ab + ab(\varepsilon + a + ab)^*(\varepsilon + a + ab)$$

Aufgabe K4 [Kontextfreie Grammatik]

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik G mit dem Produktionssystem \mathcal{P}

$$S \rightarrow AC \mid AB \quad A \rightarrow DA \mid a \quad B \rightarrow EA \quad C \rightarrow BS \quad D \rightarrow a \quad E \rightarrow b$$

Gehört das Wort $aababa$ zur Sprache $\mathcal{L}(G)$?

Geben Sie im positiven Fall einen Ableitungsbaum für das Wort an, argumentieren Sie im negativen Fall, warum das betreffende Wort nicht in $\mathcal{L}(G)$ liegt.

Antwort :

Die Grammatik G liegt bereits in Chomsky-Normalform vor.

$\{\text{---}\}$						
$\{\text{---}\}$	$\{\text{---}\}$					
$\{S\}$	$\{\text{---}\}$	$\{\text{---}\}$				
$\{\text{---}\}$	$\{S\}$	$\{\text{---}\}$	$\{S\}$			
$\{A\}$	$\{\text{---}\}$	$\{B\}$	$\{\text{---}\}$	$\{B\}$		
$\{A, D\}$	$\{A, D\}$	$\{E\}$	$\{A, D\}$	$\{E\}$	$\{A, D\}$	
a	a	b	a	b	a	

Die Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus ergibt, daß das Wort $aabbaa$ nicht in $\mathcal{L}(G)$ liegt, da das Startsymbol S der Grammatik G nicht in der obersten Zeile der Tabelle enthalten ist.

Aufgabe K5 [Nichtdeterministischer Kellerautomat]

Sei $L = \{w \in \{a, b\}^* : \#(w, a) \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar und } w = xx^R \text{ für ein } x \in \{a, b\}^*\}$.

Dabei bedeutet $\#(w, a)$ die Anzahl an a 's im Wort w .

Gibt es einen NKA \mathcal{K} mit $L = \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K})$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Antwort :

Ja, da $L = L_1 \cap L_2$ mit der regulären Sprache $L_1 = \{\#(w, a) \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar}\}$ und der kontextfreien Sprache $L_2 = \{w : w = xx^R \text{ für ein } x \in \{a, b\}^*\}$ kontextfrei ist. (siehe Skript, Lemma 3.29, S. 103)

Aufgabe K6 [Formale Definition]

Geben Sie die formale Definition für die ε -Freiheit kontextfreier Grammatiken an.

Antwort :

Sei $G = (V, \Sigma, \mathcal{P}, S)$ eine CFG. G heißt ε -frei, falls gilt:

- (1) Aus $A \rightarrow \varepsilon$ folgt $A = S$.
- (2) Falls $S \rightarrow \varepsilon$, dann gibt es *keine* Regel $A \rightarrow y$, so dass S in y vorkommt.

(siehe Skript, Definition 1.13, S. 15f)

Aufgabe K7 [Folgerungsrelation \Vdash , Äquivalenz, Gültigkeit]

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Begründen Sie Ihre Antwort entweder durch den Nachweis der betreffenden Aussage für beliebige aussagenlogische Formeln α, β, γ oder durch die Angabe eines konkreten Gegenbeispiels.

Seien α, β, γ beliebige aussagenlogische Formeln und x, y , und z Atome.

(a) Gilt $\{\alpha, \beta\} \Vdash \gamma$, so ist $\beta \rightarrow (\neg\gamma \rightarrow \neg\alpha)$ eine Tautologie.

(b) Ist die folgende Aussage korrekt?

$$(\alpha \oplus \beta) \wedge (\beta \oplus \gamma) \equiv (\alpha \leftrightarrow \gamma)$$

(c) Ist die folgende Formel gültig?

$$(x \leftrightarrow y) \rightarrow ((z \oplus \neg x) \rightarrow (y \vee \neg z))$$

Begründen Sie Ihre Antworten durch den Nachweis der betreffenden Aussage oder durch die Angabe eines konkreten Gegenbeispiels.

Antwort :

(a) Richtig.

Es gelte $\{\alpha, \beta\} \Vdash \gamma$. Sei I ein Modell für β . Zu zeigen ist, dass $\neg\gamma \rightarrow \neg\alpha$ unter I wahr ist.

Falls $\alpha^I = 1$, so ist I ein Modell für $\{\alpha, \beta\}$ und somit auch für γ . Dann aber ist $(\neg\gamma)^I = 0$ und somit $(\neg\gamma \rightarrow \neg\alpha)^I = 1$.

Falls $\alpha^I = 0$, so ist $(\neg\alpha)^I = 1$ und somit ebenfalls $(\neg\gamma \rightarrow \neg\alpha)^I = 1$.

(b) Falsch.

Wir wählen eine Belegung I mit $\alpha^I = 0, \beta^I = 0$ und $\gamma^I = 0$. Damit gilt $(\alpha \oplus \beta) \wedge (\beta \oplus \gamma)^I = 0$ und $(\alpha \leftrightarrow \gamma)^I = 1$, d.h. die Äquivalenz der Formeln gilt nicht.

(c) Richtig.

Wir nehmen zunächst an, daß die gegebene Formel nicht gültig ist. Dann gibt es eine nicht erfüllende Belegung I für die Atome x, y und z . Wegen der Semantik der Implikation gilt $(x \leftrightarrow y)^I = 1$ und $((z \oplus \neg x) \rightarrow (y \vee \neg z))^I = 0$, und somit auch $(z \oplus \neg x)^I = 1$ und $(y \vee \neg z)^I = 0$. Daher gelten $y^I = 0$ und $z^I = 1$, und wegen $(z \oplus \neg x)^I = 1$ gilt $x^I = 1$. Dann ist aber $(x \leftrightarrow y)^I = 0$. Widerspruch. Damit ist die gegebene Formel gültig.

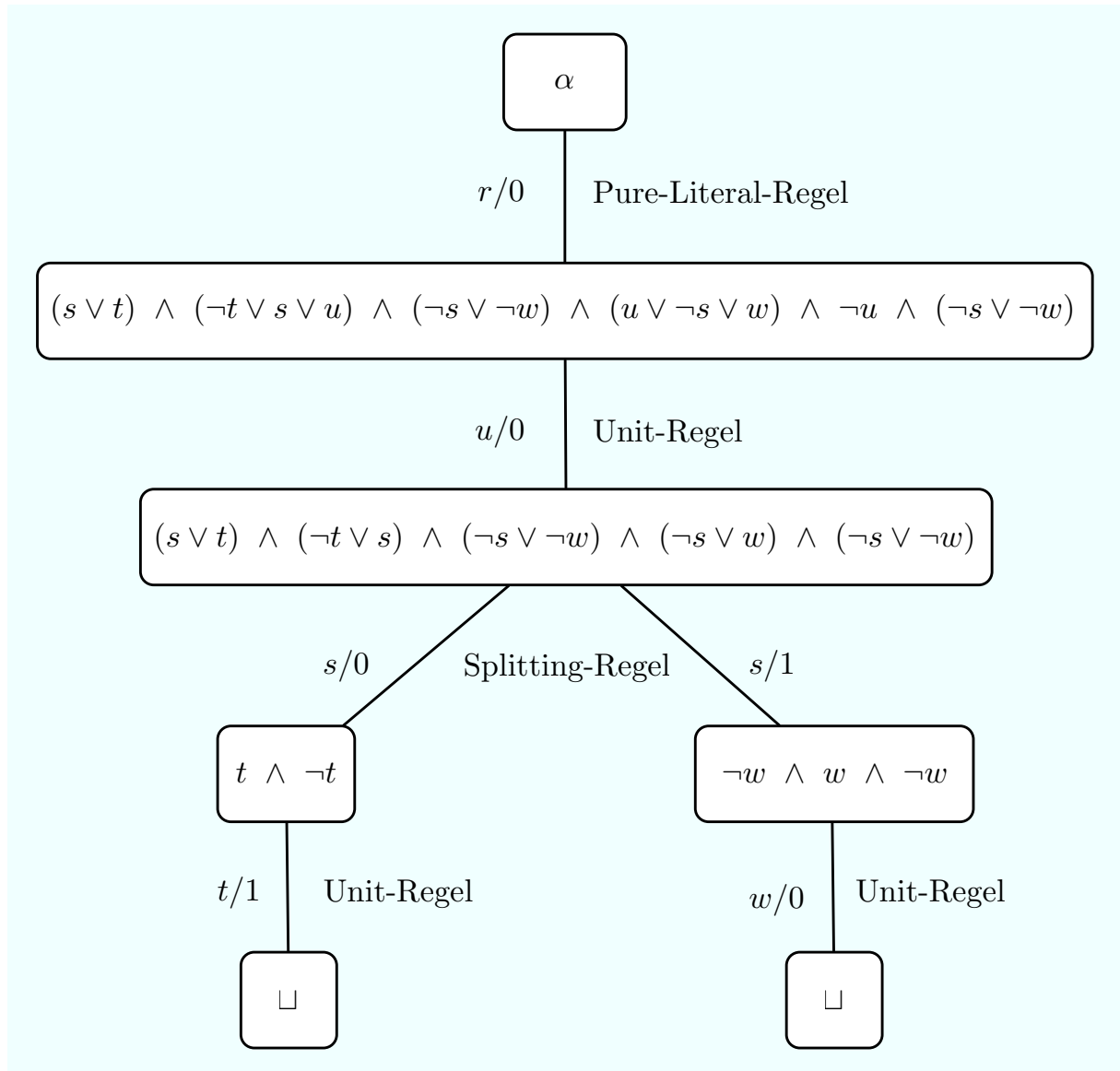
Aufgabe K8 [Davis-Putnam-Algorithmus]

Gegeben ist folgende KNF-Formel

$$\alpha = (s \vee t) \wedge (\neg t \vee s \vee u) \wedge (\neg s \vee \neg w) \wedge (u \vee \neg s \vee w) \\ \wedge \neg u \wedge (\neg r \vee w) \wedge (u \vee \neg r) \wedge (\neg s \vee \neg w)$$

Skizzieren Sie den vom Davis-Putnam-Algorithmus generierten Baum, wenn (neben der Splitting-Regel) die Unit- und die Pure-Literal-Regel (nicht aber die Subsumierungsregel) eingesetzt werden.

Antwort:



Aufgabe K9 [Resolutionsstrategien]

(a) Geben Sie für die folgende Hornformel eine P-Widerlegung an.

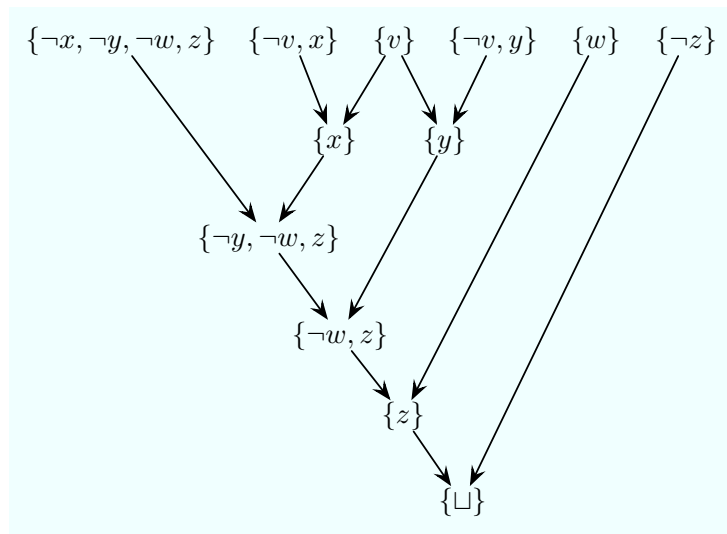
$$\alpha = (x \wedge y \wedge w \rightarrow z) \wedge w \wedge v \wedge (v \rightarrow x) \wedge (v \rightarrow y) \wedge \neg z$$

(b) Geben Sie für die folgende unerfüllbare KNF-Formel eine lineare Widerlegung an.

$$\beta = (x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge \neg z$$

Antwort :

(a) P-Widerlegung



(b) Lineare Herleitung

